

Physique statistique hors équilibre - examen

Mercredi 16 décembre 2009

Rédiger les deux parties sur des copies **SÉPARÉES**.

PREMIÈRE PARTIE

Problème 1 : Obstacle en mouvement dans un superfluide (~ 4)

Nous étudions le problème du mouvement d'un obstacle dans un superfluide. La phase condensée de Bose est décrite par l'équation (de champ moyen) de Gross-Pitaevskii pour la fonction d'onde du condensat¹ $\psi(x, t)$

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = -\frac{1}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x, t) + [U(x, t) + \epsilon(|\psi(x, t)|^2)] \psi(x, t) \quad (1)$$

où $\epsilon(|\psi|^2)$ décrit l'interaction entre bosons. ($\hbar = 1$). Nous traitons le problème en dimension $d = 1$ pour simplifier². À l'équilibre $\psi(x, t) = \sqrt{n_0} e^{-i\mu t}$ où la densité est reliée au potentiel chimique par $\mu = \epsilon(n_0)$. Nous nous intéressons aux faibles excitations $\psi(x, t) = [\sqrt{n_0} + \varphi(x, t)] e^{-i\mu t}$ avec $|\varphi| \ll \sqrt{n_0}$. On a donc $n(x, t) = n_0 + \delta n(x, t) \simeq n_0 + 2\sqrt{n_0} \text{Re}[\varphi(x, t)]$.

La réponse de la densité est reliée à la perturbation ($U(x, t)$) via la compressibilité (en Fourier) $\delta \tilde{n}(q, \omega) = \tilde{\chi}(q, \omega) \tilde{U}(q, \omega)$. À partir de l'équation de Gross-Pitaevskii on pourrait montrer (cela n'est pas demandé) que

$$\tilde{\chi}(q, \omega) = \frac{n_0}{m} \frac{q^2}{\omega^2 - \omega_B^2(q)} \quad (2)$$

où $\omega_B^2(q) = q^2 c^2 + \left(\frac{q^2}{2m}\right)^2$ donne le spectre de Bogoliubov (où $c^2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{m} n_0 \epsilon'(n_0)$).

1. Discuter physiquement la structure de la fonction de réponse.
2. Comment modifier l'équation (2) pour satisfaire le principe de causalité ?
3. On considère un obstacle en mouvement, induisant la perturbation $U(x, t) = f(x - Vt)$ avec $V > 0$, où $f(x)$ est une fonction positive, rapidement décroissante, localisée autour de $x = 0$. La transformée de Fourier correspondante est $\tilde{U}(q, \omega) = 2\pi \delta(\omega - qV) \tilde{f}(q)$ où $\tilde{f}(q)$ est la TF de $f(x)$. Montrer que les fluctuations de densité sont de la forme $\delta n(x, t) = \Phi(x - Vt)$ où $\Phi = K * f$. Exprimer³ $K(x)$ comme une intégrale.
4. **Cas $V < c$.** – Calculer explicitement $K(x)$. Donner une expression approchée du profil de densité $\delta n(x, t)$ en supposant que la fonction K est "étroite" comparativement au profil de $U(x, t)$. Dessiner l'allure de $n(x, t)$.
5. **Cas $V > c$.** – Calculer $K(x)$. Tracer l'allure de $n(x, t)$. Commenter.
6. Que laissent penser ces observations sur la dissipation dans les deux cas ?

1. Normalisé selon $\int dx |\psi(x, t)|^2 = N$, où N est le nombre de bosons.
 2. Rappelons toutefois que la condensation de Bose n'existe pas en $d = 1$. Considérer $d > 1$ ne changerait pas fondamentalement notre analyse.
 3. En simplifiant, faire attention à $(x + i0^+)^2 = x^2 + i0^+ \text{sign}(x)$.

Problème 2 : Effet Hall (~ 7)

Nous étudions la conductivité d'un gaz d'électrons se mouvant dans un plan xOy soumis à un champ magnétique perpendiculaire homogène (figure 1).

Rq : Les opérateurs sont repérés avec des $\hat{\cdot}$. Ces derniers peuvent être épargnés au correcteur.

A/ Hamiltonien de Landau.— La dynamique d'une particule de charge e (supposée sans spin pour simplifier) est décrite par l'Hamiltonien :

$$\hat{H}_L = \frac{1}{2}m\hat{v}^2 = \frac{1}{2m} \left[\hat{p} - e\vec{A}(\hat{r}) \right]^2 \quad (3)$$

où le potentiel vecteur décrit un champ magnétique **uniforme** : $\text{rot}\vec{A} = \partial_x A_y - \partial_y A_x = B$.

1. Donner la dimension⁵ de $\omega_c \stackrel{\text{def}}{=} \frac{eB}{m}$.
A.N. : calculer $\hbar\omega_c$ (en eV) pour $B = 1$ T. Convertir cette énergie en Kelvin.
2. Montrer que $[\hat{v}_x, \hat{v}_y] = i\frac{\hbar\omega_c}{m}$.
3. On introduit $\hat{v}_a(t) \stackrel{\text{def}}{=} e^{i\hat{H}_L t/\hbar} \hat{v}_a e^{-i\hat{H}_L t/\hbar}$ où $a \in \{x, y\}$. Donner les équations du mouvement de Heisenberg $\frac{d}{dt}\hat{v}_x(t) = ?$ et $\frac{d}{dt}\hat{v}_y(t) = ?$

B/ Conductivité pour un électron.— Nous introduisons un champ électrique homogène, décrit par la perturbation $\hat{H}_{\text{pert}}(t) = -e\mathcal{E}(t)\hat{x}$. L'invariance par translation du problème nous permet de considérer la densité de courant *moyennée* spatialement $\hat{j}_y \stackrel{\text{def}}{=} \int \frac{d\vec{r}}{\text{Surf}} \hat{j}_y(\vec{r}) = \frac{e}{\text{Surf}} \hat{v}_y$. La conductivité relie le champ électrique extérieur à la densité de courant :

$$\langle \hat{j}_a(t) \rangle_{\mathcal{E}} = \int dt' \sum_b \sigma_{ab}(t-t') \mathcal{E}_b(t') + O(\mathcal{E}^2) \quad (4)$$

1. (QUESTION IMPORTANTE) Exprimer $\sigma_{xx}(t)$ et $\sigma_{yx}(t)$ sous la forme de deux corrélateurs du problème à l'équilibre.
2. On écrit $\sigma_{xx}(t) = \frac{e^2}{\hbar\text{Surf}} \theta(t) X(t)$ et $\sigma_{yx}(t) = \frac{e^2}{\hbar\text{Surf}} \theta(t) Y(t)$. Calculer $\dot{X}(t)$ et $\dot{Y}(t)$. Préciser la valeur de $X(0)$ et $Y(0)$.
3. On introduit $Z(t) \stackrel{\text{def}}{=} X(t) + iY(t)$. Montrer que $Z(t) = \frac{\hbar}{m} e^{-i\omega_c t}$. Dédurre l'expression de $\sigma_{xx}(t)$ et $\sigma_{yx}(t)$. Expliquer physiquement la dépendance temporelle de ce résultat.

C/ Conductivité du gaz d'électrons.— Nous considérons maintenant un gaz de N électrons (les interactions entre électrons ne sont pas considérées).

1. Comment interprétez-vous que le résultat pour $\sigma_{ab}^{(1 \text{ élec.})}(t)$ soit indépendant de la moyenne statistique/quantique ? Dédurre la conductivité du gaz de N électrons (on note $n = N/\text{Surf}$ la densité surfacique moyenne d'électrons).
2. Calculer $\Sigma(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{\sigma}_{xx}(\omega) + i\tilde{\sigma}_{yx}(\omega)$. Commenter la structure analytique. Dédurre la conductivité Hall du gaz $\sigma_H \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{\sigma}_{xy}(\omega=0) = -\tilde{\sigma}_{yx}(\omega=0)$ (pour $B \neq 0$).
3. On rappelle que le spectre de Landau de l'Hamiltonien (3) est $E_n = \hbar\omega_c(n + 1/2)$, $n \in \mathbb{N}$ où chaque niveau de Landau est dégénéré $N_{LL} = \frac{eB\text{Surf}}{h}$ fois, où $h = 2\pi\hbar$. Exprimer la conductivité Hall en fonction du facteur de remplissage $\nu \stackrel{\text{def}}{=} \frac{N}{N_{LL}}$.
4. Relier la résistance Hall $R_H = V/I$ (V et I sont définis sur la figure 1 à la conductivité Hall. Donner la valeur numérique de h/e^2 en $k\Omega$. Commenter la courbe expérimentale de la figure 1.

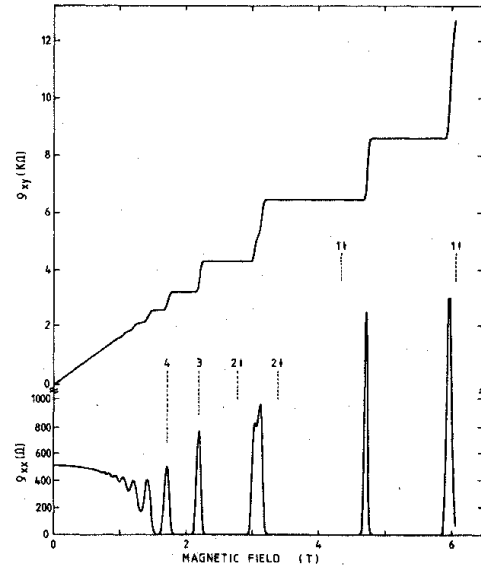
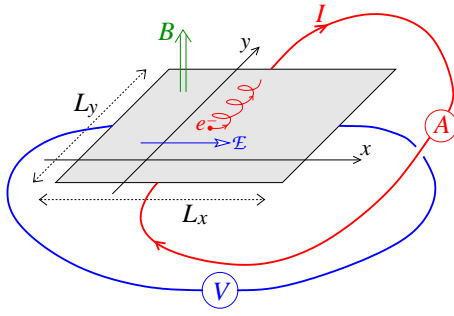


FIG. 14. Experimental curves for the Hall resistance $R_H = \rho_{xy}$ and the resistivity $\rho_{xx} \sim R_x$ of a heterostructure as a function of the magnetic field at a fixed carrier density corresponding to a gate voltage $V_g = 0$ V. The temperature is about 8 mK.

FIGURE 1 – À GAUCHE : Gaz d'électrons bidimensionnel soumis à un champ magnétique perpendiculaire homogène et à un champ électrique longitudinal. À DROITE : Résistivité Hall et longitudinale d'un gaz d'électrons bidimensionnel.

D/ Épilogue.— Le calcul que nous venons de faire, qui a montré que $\rho_{yx} \propto B$, ne permet pas d'expliquer la quantification mise en évidence expérimentalement. Pour cela nous devons invoquer la présence de désordre (impuretés, défauts structurels) expliquant la *localisation* d'une partie des états quantiques, et donc leur non-participation au transport électronique. L'effet remarquable est que la contribution des états d'un niveau de Landau à la conductivité est insensible à la présence du désordre. Pour davantage d'informations, on pourra aller lire la conférence Nobel de K. von Klitzing : http://nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1985/klitzing-lecture.html

Annexe :

- Convention pour les transformations de Fourier :

$$\tilde{f}(q, \omega) = \int dt dx e^{i\omega t - iqx} f(x, t) \quad \text{et} \quad f(x, t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{dq}{2\pi} \tilde{f}(q, \omega) e^{-i\omega t + iqx} \quad (5)$$

- Quelques constantes fondamentales : $e \simeq 1.602 \cdot 10^{-19}$ C, $\hbar \simeq 1.054 \cdot 10^{-34}$ J.s et $k_B \simeq 1.380 \cdot 10^{-23}$ J.K⁻¹.

4. Il s'agit des électrons piégés à une interface de semiconducteurs GaAs/GaAl_xAs_{1-x}, par exemple.

5. Ne pas confondre "dimension" et "unité".

Problème 3 : Nombre de Prandtl, viscosité non-linéaire et modèle BGK pour un gaz dilué (~ 10)

Les différentes questions (et a fortiori les parties A et B) sont dans une large mesure indépendantes

Les phénomènes de transport dans un gaz dilué peuvent être décrits par une équation de Boltzmann. On se propose ici de travailler dans un cadre classique, avec une forme simplifiée de l'opérateur de collision⁶ :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) f(\vec{r}, \vec{v}, t) = -\frac{f - f_0}{\tau}, \quad (6)$$

où $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$ désigne la fonction de distribution des vitesses au point \vec{r} à l'instant t , et τ est une constante de temps (positive). La fonction de distribution f_0 est associée à l'état d'équilibre thermodynamique local : avec des notations usuelles,

$$f_0(\vec{r}, \vec{v}, t) = n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp \left[-\frac{m(\vec{v} - \vec{u})^2}{2kT} \right] \quad (7)$$

où n désigne la densité volumique de particules. On se placera en dimension $d = 3$, bien que tous les calculs puissent être menés à terme dans une dimension quelconque sans difficulté additionnelle. On notera que la solution d'équilibre local f_0 fait intervenir le champ de vitesse local $\vec{u}(\vec{r}, t)$ et le champ de température locale $T(\vec{r}, t)$, qui vérifient :

$$n\vec{u} = \int \vec{v} f d\vec{v} = \int \vec{v} f_0 d\vec{v} \quad \text{et} \quad \frac{3nk}{m} T = \int (\vec{v} - \vec{u})^2 f d\vec{v} = \int (\vec{v} - \vec{u})^2 f_0 d\vec{v}. \quad (8)$$

Une fois l'équation (6) résolue pour certaines conditions initiales et aux limites, on peut obtenir le flux de chaleur \vec{J}_q et le tenseur des pressions *via* :

$$\left. \begin{aligned} \vec{J}_q &= \frac{m}{2} \int \vec{\xi} \xi^2 f d\vec{\xi} \\ \overleftrightarrow{P} &= m \int \vec{\xi} \vec{\xi} f d\vec{\xi} \end{aligned} \right\} \text{ où l'on a posé } \vec{\xi} = \vec{v} - \vec{u}. \quad (9)$$

A/ Conductivité thermique, viscosité, et nombre de Prandtl

Le but est ici de calculer le nombre de Prandtl du gaz, défini par

$$\mathcal{Pr} = \frac{\eta c_p}{\kappa} \quad (10)$$

où η désigne la viscosité dynamique, κ est le coefficient de conductivité thermique, et c_p est la chaleur spécifique par unité de masse à pression constante. Dans toute cette question A, on se limitera à une solution perturbative du problème général (6), que l'on cherchera de la forme $f = f_0 + f_1$, où la correction f_1 est d'ordre 1 en τ .

A-1/ (*Préliminaires, pas essentiels pour la suite*) Avec des arguments dimensionnels (sans calcul), indiquer la dépendance de η et κ par rapport aux paramètres du problème (τ , k , la densité n , la température T ...). Quelle conclusion peut-on en tirer concernant le nombre de Prandtl ?

6. Cette approximation à un temps de relaxation se trouve dans la littérature sous le nom de "modèle BGK" (Bhatnagar, Gross, Krook).

A-2/ Dans un premier temps, on souhaite calculer la conductivité thermique κ . Pour ce faire, on suppose le gaz au repos (et donc à *pression* nT constante), soumis à un gradient de température stationnaire suivant l'axe Ox . Calculer f_1 . En déduire le flux de chaleur \vec{J}_q . Montrer que

$$\kappa = \frac{1}{6} m \tau \frac{\partial}{\partial T} \left(\int v^4 f_0 d\vec{v} \right). \quad (11)$$

Calculer finalement κ .

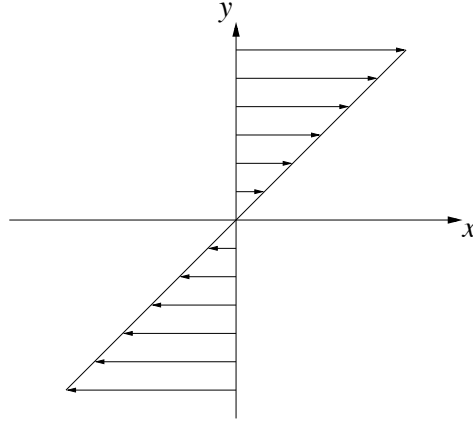


FIGURE 2 – Géométrie considérée pour l'écoulement de cisaillement uniforme (laminaire et stationnaire), avec une densité $n = \text{cste}$. Le champ de vitesse \vec{u} représenté est tel que $u_x = ay$. La température est indépendante du point \vec{r} .

A-3/ Afin de calculer la viscosité, on se place dans des conditions isothermes, en considérant un écoulement laminaire et stationnaire avec un profil de vitesse d'écoulement $\vec{u} = ay \hat{x}$, où la fréquence a désigne le taux de cisaillement, et \hat{x} est un vecteur unitaire de l'axe des x (voir la figure 2). Il s'agit d'un écoulement de cisaillement uniforme pour lequel la force visqueuse par unité de surface (c'est-à-dire la composante xy du tenseur des pressions) s'écrit

$$P_{xy} = -\eta \frac{\partial u_x}{\partial y} = -\eta a. \quad (12)$$

Calculer la correction f_1 , puis P_{xy} , et en déduire la viscosité.

A-4/ Rappeler la valeur de la chaleur spécifique c_p dans le cadre des approximations retenues ici (on supposera le gaz monoatomique), et donner pour finir l'expression du nombre de Prandtl. Pour la plupart des gaz dilués, on a $Pr \simeq 2/3$. Que peut-on en conclure ?

A-5/ (subsidaire) Quelle est la valeur du nombre de Prandtl Pr en dimension d quelconque ?

B/ Écoulement de cisaillement et viscosité non-linéaire

Les considérations précédentes sont valables dans la limite dite Newtonienne (faible taux de cisaillement, *i.e.* $a \rightarrow 0$). Nous nous proposons désormais, de nouveau pour l'écoulement de cisaillement uniforme (cf Figure 2), de calculer la viscosité non-linéaire $\eta(a)$, que nous définirons naturellement par le rapport $-P_{xy}/a$ (cf par exemple l'équation (12)).

B-1/ Pour aborder ce problème, il est judicieux de se placer dans le référentiel lagrangien, c'est-à-dire le référentiel mobile du centre de masse. Nous cherchons ainsi des solutions de l'équation de Boltzmann, homogènes dans ce référentiel, et donc de la forme

$$f(\vec{r}, \vec{v}, t) = \tilde{f}(\vec{v} - \vec{u}, t) \quad (13)$$

où $\vec{u} = ay\hat{x}$ est la vitesse locale au point \vec{r} . Montrer que l'équation (6) s'écrit alors

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - a \xi_y \frac{\partial}{\partial \xi_x} \right) \tilde{f}(\vec{\xi}, t) = -\frac{\tilde{f} - f_0}{\tau}. \quad (14)$$

Bien entendu, ξ_x et ξ_y désignent les composantes cartésiennes de $\vec{\xi} = \vec{v} - \vec{u}$. Notre formulation présente l'intérêt d'éliminer toute dépendance spatiale de la description (f_0 ne dépend que de $\vec{\xi}$ et t).

B-2/ En intégrant l'équation (14) avec des poids bien choisis, établir les relations suivantes

$$\frac{dnkT}{dt} = -ba P_{xy}, \quad \frac{dP_{xy}}{dt} + \frac{P_{xy}}{\tau} = -c P_{yy}, \quad \frac{dP_{yy}}{dt} + \frac{P_{yy}}{\tau} = \frac{nkT}{\tau}, \quad (15)$$

où b et c sont des coefficients numériques dont on donnera la valeur.

B-3/ En déduire que l'équation d'évolution de la température se met sous la forme

$$\left(\frac{d}{dt} + \frac{1}{\tau}\right)^2 \frac{d}{dt} T = \frac{ba^2}{\tau} T. \quad (16)$$

Sans calcul, commenter succinctement le comportement temporel de T (croissance? décroissance?). Quel phénomène physique ce comportement traduit-il? Peut-on trouver des solutions stationnaires au problème?

B-4/ Comment se comporte, aux temps longs, la solution de (16)? Indication : l'identité suivante

$$18 \left(1 + \frac{4}{3} \text{sh}^2 x\right)^2 \text{sh}^2 x = \text{ch}(6x) - 1 \quad (17)$$

permet de trouver celle des racines du polynôme $X(1+X)^2 = b(a\tau)^2$, qui a la plus grande partie réelle.

B-5/ Montrer qu'aux temps longs, la viscosité adimensionnée $\eta^* = -\frac{P_{xy}}{a\tau nkT}$ devient indépendante du temps. Quelle en est l'expression?

B-6/ Montrer que l'on retrouve bien les résultats de la partie A.

B-7/ Un fluide est dit rhéoépaississant si sa viscosité croît avec le taux de cisaillement; on parle de fluide rhéofluidifiant dans le cas contraire. Dans quelle catégorie notre gaz dilué émerge-t-il?

B-8/ On cherche désormais à obtenir une information plus microscopique que celle qui est présente dans les moments de la distribution de vitesse. On définit une vitesse réduite

$$\vec{c} = \sqrt{\frac{m}{2kT}} \vec{\xi}, \quad (18)$$

dont on cherche la densité de probabilité aux temps longs sous une forme d'échelle :

$$\tilde{f}^*(\vec{c}) = \frac{1}{n} \left(\frac{2kT}{m}\right)^{3/2} \tilde{f}(\vec{\xi}, t). \quad (19)$$

On s'intéresse ainsi à un scénario d'évolution auto-similaire de $\tilde{f}(\vec{\xi}, t)$, où toute la dépendance temporelle est encodée dans la température. Par souci de simplicité, on se limite au cas $c_y = 0$ (i.e. $\xi_y = 0$), et on note \vec{c}_\perp la composante transverse [couple (c_x, c_z)], de module $c_\perp = \sqrt{c_x^2 + c_z^2}$. Etablir l'équation différentielle vérifiée par $\tilde{f}^*(\vec{c}_\perp)$, que l'on supposera isotrope (fonction uniquement de c_\perp). Montrer ensuite que

$$\tilde{f}^*(\vec{c}_\perp) = \frac{1}{\pi^{3/2}\lambda} c_\perp^{2/\lambda-3} \Gamma\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{\lambda}, c_\perp^2\right) \quad \text{où} \quad \lambda = \frac{4}{3} \text{sh}^2 \left[\frac{1}{6} \text{ch}^{-1} (1 + 9a^2\tau^2) \right] \quad (20)$$

et $\Gamma(x, \epsilon) = \int_\epsilon^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$ désigne la fonction Gamma incomplète

B-9/ Mettre en évidence un taux de cisaillement critique a_c , au delà duquel $\tilde{f}^*(\vec{c}_\perp)$ est singulière au voisinage de $\vec{c}_\perp = \vec{0}$. Préciser la valeur de a_c et discuter le comportement de $\tilde{f}^*(\vec{c}_\perp)$ au voisinage de l'origine.

Références : R.W. Zwanzig, *J. Chem. Phys.* **71**, 4416 (1979);

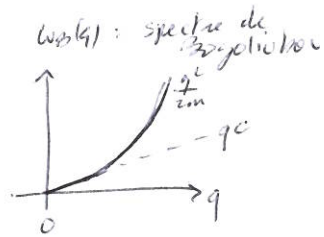
V. Garzó and A. Santos, *Kinetic Theory of Gases in Shear Flows*, Kluwer Academic, 2003.

pour des développements récents (systèmes dissipatifs), V. Garzó & E. Trizac, arXiv :0911.3290.

Problème 1. Obstacle en mot dans un superfluide.

compressibilité (donnée par l'éq. de Gross-Pitaevskii)

$$\tilde{\chi}(q, \omega) = \frac{n_0}{m} \frac{q^2}{\omega^2 - \omega_B^2(q)} \quad \text{où} \quad \omega_B(q) = \sqrt{q^2 c^2 + \left(\frac{q^2}{2m}\right)^2}$$



1. $\tilde{\chi}(q, \omega) = \infty \rightarrow$ spectre des excitations collectives $\omega = \omega_B(q)$ (phonons)

2. pôles dans le plan complexe ω (de la variable ω) $\Rightarrow \chi(t) \propto \theta(t)$ est causale donc $\omega \rightarrow \omega + i0^+$

finalement
$$\tilde{\chi}(q, \omega) = \frac{n_0}{m} \frac{q^2}{(\omega + i0^+)^2 - \omega_B^2(q)}$$

3.
$$\tilde{S}_n(q, \omega) = \underbrace{\tilde{\chi}(q, \omega)}_{\text{fact de réponse}} \underbrace{\tilde{U}(q, \omega)}_{\text{perturbation}}$$

$$U(x, t) = f(x - vt) \Rightarrow \tilde{U}(q, \omega) = \int dx dt e^{i\omega t} \int dx e^{-iqx} f(x - vt) = 2\pi \delta(\omega - qv) \tilde{f}(q)$$

$$S_n(x, t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \int \frac{dq}{2\pi} e^{iqx} \tilde{\chi}(q, \omega) 2\pi \tilde{f}(q) \delta(\omega - qv) = \int \frac{dq}{2\pi} e^{iq(x - vt)} \tilde{\chi}(q, qv) \tilde{f}(q)$$

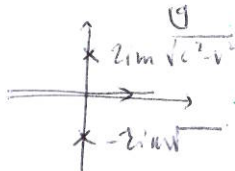
$$K(x) = \int \frac{dq}{2\pi} e^{iqx} \tilde{\chi}(q, qv)$$

$$S_n(x, t) = (K * f)(x - vt)$$

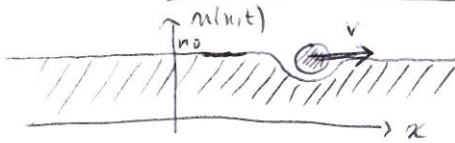
$$K(x) = \frac{n_0}{m} \int \frac{dq}{2\pi} e^{iqx} \frac{q^2}{(qv + i0^+)^2 - q^2 c^2 - \frac{q^4}{4m^2}} = -4m n_0 \int_{\mathbb{R}} \frac{dq}{2\pi} \frac{e^{iqx}}{q^2 + 4m^2(c^2 - v^2) - i0^+ \text{sign}(qv)}$$

4. Cas subsonique $|v| < c \Rightarrow$ la $i0^+$ est inutile. $K(x)$ est la TF d'une lorentzienne.

$$K(x) = -\frac{4m n_0}{x} \frac{1}{2m\sqrt{c^2 - v^2}} \int_{\mathbb{R}} \frac{dq}{2\pi} e^{iqx} \frac{2m\sqrt{c^2 - v^2}/\pi}{q^2 + 4m^2(c^2 - v^2)}$$



$$\Rightarrow K(x) = -\frac{n_0}{\sqrt{c^2 - v^2}} e^{-2m\sqrt{c^2 - v^2}|x|} \approx -4m \cdot n_0 \delta(x)$$

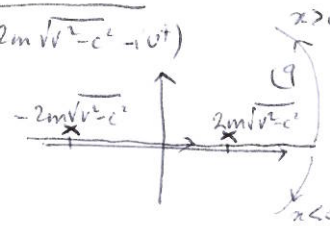


le profil de limite s'adapte à l'obstacle.

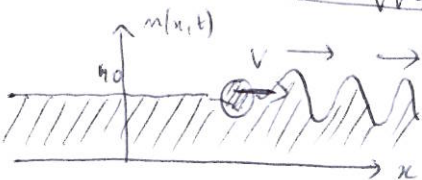
$$S_n(x, t) \approx -4m \cdot n_0 \times U(x, t) = f(x - vt)$$

5. Cas supersonique $|v| > c$ ($v > 0$) \Rightarrow

$$K(x) = -\frac{4m \cdot n_0}{2\pi} \theta(x) 2i\pi \left[\frac{e^{i2m\sqrt{v^2 - c^2}x}}{4m\sqrt{v^2 - c^2}} + \frac{e^{-i2m\sqrt{v^2 - c^2}x}}{-4m\sqrt{v^2 - c^2}} \right]$$



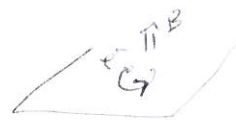
$$K(x) = \frac{2n_0}{\sqrt{v^2 - c^2}} \theta(x) \sin(2m\sqrt{v^2 - c^2}x)$$



6. Pour $v > c$, les oscillations correspondent à l'excitation des modes collectifs et à l'émission d'énergie (à l'infini) alors que pour $v < c$ la perturbation reste localisée (absence de dissipation)

Problème 2 - Effet Hall.

$$H = \frac{(\vec{p} - e\vec{A})^2}{2m} ; B = \vec{\omega} \vec{A}$$



A- 1. $\omega_c \stackrel{\text{def}}{=} \frac{eB}{m}$ $[\frac{eB}{m}] = \frac{1}{m} \times \frac{[eA]}{L} = \frac{1}{m} \frac{[p]}{L} = \frac{MLT^{-1}}{ML} = T^{-1}$

si $B = 1T$
 $m = 0.067 \times m_e \Rightarrow \hbar \omega_c = \frac{\hbar e B}{m} \approx \frac{10^{-34} \times 1}{0.067 \times 10^{-30}} \approx \frac{1}{0.067} \times 10^{-3} \approx 1,5 \text{ meV} \rightarrow \frac{\hbar \omega_c}{k_B} \approx 15 \text{ K}$

2. $[\sigma_x, \sigma_y] = \frac{1}{m^2} [p_x - eA_x, p_y - eA_y] = \frac{-e}{m^2} ([p_x, A_y] - [p_y, A_x]) = \frac{ie\hbar}{m^2} (\partial_x A_y - \partial_y A_x)$
 $\Rightarrow [\sigma_x, \sigma_y] = \frac{i\hbar \omega_c}{m}$

3. $\vec{v}(t) = e^{i\hbar t/m} \vec{v} e^{-i\hbar t/m} \Rightarrow \frac{d}{dt} \vec{v}(t) = \frac{i}{\hbar} [H, \vec{v}(t)] \rightarrow \begin{cases} \frac{d\sigma_x(t)}{dt} = \omega_c \sigma_y(t) \\ \frac{d\sigma_y(t)}{dt} = -\omega_c \sigma_x(t) \end{cases}$

B. Conductivité d'un électron

$\vec{A}_{\text{part}}(t) = -e \vec{E}(t) \hat{x}$ (champ électrique homogène selon \vec{u}_x)

1. réponse de la densité de courant moyenne $\vec{j} = \frac{e}{S_{\text{surf}}} \vec{v}$: $\sigma_{xx}(t) = \frac{1}{\hbar} \theta(t) \langle [\frac{e\sigma_x(t)}{S_{\text{surf}}}, e x] \rangle$
 $\sigma_{yx}(t) = \frac{1}{\hbar} \theta(t) \langle [\frac{e\sigma_y(t)}{S_{\text{surf}}}, e x] \rangle$

électrons $\begin{cases} \sigma_{xx}(t) = \frac{e^2}{\hbar S_{\text{surf}}} \theta(t) \chi(t) \\ \sigma_{yx}(t) = \frac{e^2}{\hbar S_{\text{surf}}} \theta(t) \psi(t) \end{cases}$ avec $\begin{cases} \chi(t) = i \langle [\sigma_x(t), x] \rangle \\ \psi(t) = i \langle [\sigma_y(t), x] \rangle \end{cases}$

2. $\dot{\chi}(t) = i \langle [\dot{\sigma}_x(t), x] \rangle = \omega_c \psi(t)$
 $\dot{\psi}(t) = i \langle [\dot{\sigma}_y(t), x] \rangle = -\omega_c \chi(t)$

$\Rightarrow \begin{cases} \dot{\chi}(t) = \omega_c \psi(t) \\ \dot{\psi}(t) = -\omega_c \chi(t) \end{cases}$

3. $Z(t) \stackrel{\text{def}}{=} \chi(t) + i\psi(t)$ combine les deux corrélations. $\chi(0) = i \langle [\sigma_x, x] \rangle = \frac{\hbar}{m}$
 $\psi(0) = i \langle [\sigma_y, x] \rangle = 0$

$\dot{Z}(t) = \omega_c \psi(t) - \omega_c i \chi(t) = -i\omega_c Z(t) \Rightarrow Z(t) = Z(0) e^{-i\omega_c t} \Rightarrow Z(t) = \frac{\hbar}{m} e^{-i\omega_c t}$
 $\sigma_{ij}(t)$ est réelle (car $\langle \vec{j}(t) \rangle \in \mathbb{R}$)

$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_{xx}(t) = \frac{e^2}{m S_{\text{surf}}} \theta(t) \cos \omega_c t \\ \sigma_{yx}(t) = -\frac{e^2}{m S_{\text{surf}}} \theta(t) \sin \omega_c t \end{cases}$

traçent le mont cyclotron \Rightarrow $\omega^- \Rightarrow \vec{E}(t) \times \delta(t)$

C. Réponse du gaz d'électrons.

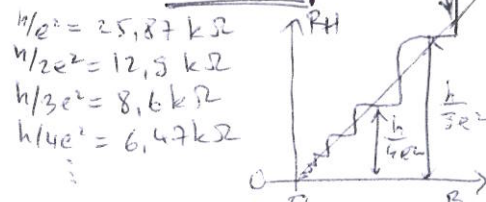
1. les résultats précédents ne dépendent pas de $\langle \dots \rangle$: cela indique que tous les états quantiques apportent la même contribution. $\Rightarrow \sigma_{ij}^{(ne^-)}(t) = N \times \sigma_{ij}^{(1e^-)}(t)$

$n = \frac{N}{S_{\text{surf}}} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_{xx}(t) = \frac{e^2 n}{m} \theta(t) \cos \omega_c t \\ \sigma_{yx}(t) = -\frac{e^2 n}{m} \theta(t) \sin \omega_c t \end{cases} \Rightarrow \Sigma(t) = \sigma_{xx}(t) + i\sigma_{yx}(t) = \frac{ne^2}{m} \theta(t) e^{-i\omega_c t}$

2. $\tilde{\Sigma}(\omega) = \int dt \Sigma(t) e^{i(\omega - 0^+)t}$ $\xrightarrow{\text{triangulation}} = \frac{ne^2}{m} \frac{1}{0^+ + i(\omega_c - \omega)} = \frac{ne^2}{m} \frac{i}{\omega - \omega_c + i0^+}$
 $\tilde{\Sigma}(\omega=0) = -\frac{ine^2}{m\omega_c}$ (le 0^+ est inutile si $B \neq 0$)
 $\Rightarrow \tilde{\sigma}_{xx}(\omega=0) = 0$ et $\tilde{\sigma}_{yx}(\omega) = -\frac{ne}{B} \Rightarrow \sigma_H = \frac{ne}{B}$

3. $\nu = \frac{N}{N_H} = \frac{nh}{eB} \Rightarrow \sigma_H = \nu \times \frac{e^2}{h}$

4. si $\sigma_{xx} = 0 \Rightarrow \sigma_{xy} = \frac{1}{\sigma_H}$ et $R_{\text{Hall}} = \frac{V}{I} = \frac{E_x L_x}{j_y \times L_x} = \frac{1}{\sigma_H} = \frac{1}{\nu} \frac{h}{e^2}$



Ceci est quantifié (magnétique, explicite pas)