TD n°7 : Dissipation
Équation de Langevin quantique

1 Dissipation dans une ligne de transmission

Une ligne de transmission (un cable coaxial) parfaite (sans résistance) est caractérisée par une capacité et une inductance par unité de longueur. Elle peut être modélisée comme une série d'inductances et de capacités identiques. Nous montrons que l'impédance de la ligne semi-infinie possède une partie *dissipative*, alors que la ligne est constituée d'*éléments non dissipatifs*.

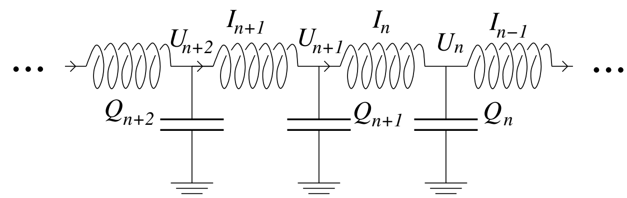

Figure 1 – *Une ligne de transmission (un cable coaxial) possède une inductance et une capacité. Le ligne de transmission parfaite (sans élément résistif) peut être modélisée comme une série d'éléments* (L, C) *identiques.*

Nous étudions dans un premier temps les modes propres de la ligne infinie, puis nous calculons l'impédance de la ligne semi infinie. On cherche des solutions harmoniques : $I_n(t) = \tilde{I}_n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$ dans la $n$ième inductance.

On notera les impédances complexes d'une inductance et d'une capacité : Z_L et Z_C.

1/ En utilisant les lois de Kirchhoff, trouver une équation satisfaite par les courants $\tilde{I}_n$.

2/ *Modes propagatifs.–* Montrer que les modes propagatifs $I_n(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}qn-\mathrm{i}\omega(q)t}$ n'existent que pour $\omega \in [0, \omega_0]$ où $\omega_0 \stackrel{\text{def}}{=} 2/\sqrt{LC}$ et préciser la relation de dispersion.

3/ *Modes évanscents.–* Donner également la relation de dispersion des modes évanscents $I_n(t) = (-1)^n \mathrm{e}^{qn-\mathrm{i}\omega(q)t}$. Sur quelle distance ces modes se propagent-ils (en fonction de ω) ?

4/ *Impédance de la ligne semi-infinie.–* Soit Z_n l'impédance de n couples $L-C$. Trouver la relation de récurrence entre Z_n et Z_{n+1}. En déduire $Z_\infty \equiv Z(\omega)$. Tracer $\mathrm{Re}\, Z(\omega)$ et $\mathrm{Im}\, Z(\omega)$. Vérifier que $\mathrm{Re}\, Z(\omega) \neq 0$ dans un domaine de fréquences. Commenter.

2 Oscillateur couplé à un bain d'oscillateurs

Dans cet exercice nous étudions la dynamique d'un oscillateur couplé à un bain d'oscillateurs harmoniques supposés à l'équilibre thermodynamique. La dynamique du système est décrite par le hamiltonien :

$$H = \underbrace{\omega_0(a^\dagger a + 1/2)}_{H_0} + \underbrace{a^\dagger \sum_k g_k b_k + h.c}_{H_{\text{int}}} + \underbrace{\sum_k \Omega_k (b_k^\dagger b_k + 1/2)}_{H_{\text{Bath}}} \tag{1}$$

avec $[a, a^\dagger] = 1$ et $[b_k, b^\dagger_{k'}] = \delta_{k,k'}$. La densité spectrale des fréquences Ω_k est une fonction continue. Les constantes de couplage complexes g_k sont des données du problème, de plus g_k est supposé varier lentement avec Ω_k.

L'objectif de l'exercice est d'étudier la fonction de réponse de l'oscillateur pour caractériser la dissipation.

1/ Calculer $[H, a]$ et $[H, b_k]$. En déduire les équations du mouvement pour les opérateurs en représentation de Heisenberg.

2/ La méthode générale pour aboutir à l'équation de Langevin quantique consiste à résoudre formellement l'équation du mouvement pour $b_k(t)$ et injecter cette solution dans l'équation du mouvement de $a(t)$. Montrer qu'en suivant cette procédure on aboutit à la structure :

$$\dot{a}(t) = -\mathrm{i}\omega_0\, a(t) - \int_0^t \mathrm{d}t'\, \gamma(t-t')\, a(t') + \xi(t) \tag{2}$$

Donner l'expression de la fonction $\gamma(t)$ et de l'opérateur $\xi(t)$. Il est commode d'introduire une fonction de Heaviside $\theta(t)$ dans la définition de $\gamma(t)$.

3/ Calculer le commutateur $[\xi(t), \xi^\dagger(0)]$.

4/ Quelle est l'évolution libre (pour $g_k = 0$) de $a(t)$? En admettant que le couplage g_k est une fonction variant lentement avec la fréquence Ω_k, et que le temps t est assez grand, justifier la substitution

$$\int_0^t \mathrm{d}t'\, \gamma(t-t')\, a(t') \to \tilde{\gamma}(\omega_0)\, a(t) \tag{3}$$

Cette substitution rend l'équation de Langevin quantique locale en temps.

5/ On écrit : $\tilde{\gamma}(\omega_0) = \mathrm{i}\delta\omega_0 + \Gamma/2$. Donner les expressions de $\delta\omega_0$ et Γ. Commenter.

6/ Écrire la nouvelle 'équation de Langevin quantique en fonction des paramètres $\delta\omega_0$ et Γ. Intégrer l'équation.

7/ On admet que les oscillateurs sont initialement à l'équilibre thermodynamique :

$$\langle b^\dagger_k b_{k'} \rangle = \delta_{k,k'} \overline{n}_k \tag{4}$$

où $\overline{n}_k = \frac{1}{\mathrm{e}^{\beta\Omega_k} - 1}$. Calculer le corrélateur $\langle \xi^\dagger(t)\, \xi(0) \rangle$. Montrer que $\langle a(t)^\dagger a(t) \rangle$ relaxe vers la distribution de Bose-Einstein. Commentaire.

8/ Calculer le commutateur $[a(t), a^\dagger(t')]$. Déduire l'expression de la fonction de Green retardée

$$\mathcal{G}^{\mathrm{Ret}}(t, t') \stackrel{\mathrm{def}}{=} -\mathrm{i}\theta(t-t') \langle [a(t), a^\dagger(t')] \rangle \tag{5}$$

Montrer que :

$$\mathcal{G}^{\mathrm{Ret}}(t) \simeq -\mathrm{i}\, \theta(t)\, \mathrm{e}^{-(\mathrm{i}\omega_R + \Gamma/2)t} \tag{6}$$

9/ Montrer que la fonction de réponse $\chi_{xx}(t)$ est reliée à la fonction de Green retardée :

$$\chi_{xx}(t) = \mathrm{i}\theta(t) \langle [x(t), x] \rangle = -\frac{1}{\omega_0}\, \mathrm{Re}\, G^{\mathrm{Ret}}(t) \tag{7}$$

Déduire $\widetilde{\chi}_{xx}(\omega)$.

10/ Comparer avec le résultat d'un oscillateur amorti classique. Exprimer la puissance dissipée par l'oscillateur forcé.