TD n^{o}6 : Ondes de spin dans un ferromagnétique – magnons

On étudie un modèle (quantique) phénoménologique de ferromagnétique. Soit $\hat{\vec{S}}(\vec{r})$ l'opérateur densité de spins (l'aimantation locale) correspondant à des spins localisés ou aux spins des électrons de conduction. Nous écrivons l'énergie d'interaction entre spins sous la forme :

$$\hat{H}_0 = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}\vec{r}\,\mathrm{d}\vec{r}\,'\, v(\vec{r}-\vec{r}\,')\,\hat{\vec{S}}(\vec{r})\cdot\hat{\vec{S}}(\vec{r}\,') \tag{1}$$

où $v(\vec{r}-\vec{r}\,')$ est un potentiel d'interaction. Cette interaction est une interaction effective qui trouve son origine dans l'interaction de Coulomb entre électrons et le principe de Pauli (mécanisme d'échange dans le cas d'une interaction ferromagnétique ou de superéchange dans le cas d'une interaction antiferromagnétique). L'objet du problème est d'étudier la susceptibilité magnétique dans la phase ferromagnétique.

Afin d'éviter des ambiguïtés, ou simplement pour aider la discussion, les opérateurs sont *parfois* "chapeautés".

1/ Justifier que

$$[\hat{S}_i(\vec{r}), \hat{S}_j(\vec{r}\,')] = \mathrm{i}\epsilon_{ijk}\,\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')\,\hat{S}_k(\vec{r}) \qquad \text{(on choisit } \hbar = 1) \tag{2}$$

(avec **sommation implicite sur les indices répétés**) où ϵ_{ijk} est le tenseur de Levi-Civita [1].

Suggestion : on peut considérer la densité de spin pour une particule : $\hat{\vec{S}}(\vec{r}) = \hat{\vec{S}}\,\delta(\vec{r}-\hat{\vec{r}})$ où $\hat{\vec{r}}$ est l'opérateur position et $\vec{S}$ l'opérateur de spin.

2/ Équation du mouvement.– Calculer la dérivée par rapport au temps de l'opérateur en représentation d'interaction $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{S}_i(\vec{r},t) = \mathrm{i}[\hat{H}_0, \hat{S}_i(\vec{r},t)]$. Montrer que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\vec{S}}(\vec{r},t) = \int \mathrm{d}\vec{r}\,'\, v(\vec{r}-\vec{r}\,')\,\hat{\vec{S}}(\vec{r}\,',t)\times\hat{\vec{S}}(\vec{r},t) - \mathrm{i}\,v(0)\,\hat{\vec{S}}(\vec{r},t) \tag{3}$$

Vérifier l'hermiticité du résultat.

Indications : On rappelle que $(\vec{A}\times\vec{B})_i = \epsilon_{ijk}A_jB_k$ et $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijl} = 2\delta_{kl}$.

3/ Susceptibilité magnétique (La question Importante).– Le système est soumis à un champ magnétique extérieur $\vec{\mathcal{B}}(\vec{r},t)$, ce qui apporte la contribution à l'énergie :

$$\hat{H}_{\mathrm{pert}}(t) = -\int \mathrm{d}\vec{r}\,\hat{\vec{S}}(\vec{r})\cdot\vec{\mathcal{B}}(\vec{r},t) \tag{4}$$

La susceptibilité magnétique est définie selon

$$\langle S_i(\vec{r},t)\rangle_{\mathcal{B}} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \langle S_i(\vec{r})\rangle + \int \mathrm{d}t'\mathrm{d}\vec{r}\,'\,\chi_{ij}(\vec{r}-\vec{r}\,',t-t')\,\mathcal{B}_j(\vec{r}\,',t') + O(\mathcal{B}^2) \tag{5}$$

où $\langle\cdots\rangle$ et $\langle\cdots\rangle_{\mathcal{B}}$ sont respectivement les moyennes quantiques/statistiques à l'équilibre et en présence de la perturbation. Exprimer la susceptibilité comme une fonction de corrélation du système à l'équilibre.

1. ϵ_{ijk} est le tenseur antisymétrique par rapport à l'échange de couples d'indices : $\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik}$, etc, avec $\epsilon_{123} = +1$.

4/ Utiliser l'équation du mouvement pour calculer $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\chi_{ij}(\vec{r}-\vec{r}\,',t)$.

5/ On suppose que l'interaction est telle que le système est dans une phase **ferromagnétique** à suffisamment basse température. On note $\vec{M}$ l'aimantation moyenne $\vec{M} \stackrel{\text{def}}{=} \langle \hat{\vec{S}}(\vec{r})\rangle$ et on introduit l'opérateur $\vec{m}(\vec{r})$ décrivant les fluctuations d'aimantation ($||\vec{m}|| \ll ||\vec{M}||$) :

$$\hat{\vec{S}}(\vec{r}) = \vec{M} + \hat{\vec{m}}(\vec{r}) \tag{6}$$

En négligeant les termes d'ordre $||\vec{m}||^3$ dans l'équation obtenue au **4**, montrer qu'on obtient une équation différentielle pour la susceptibilité.

6/ Susceptibilité dans l'espace de Fourier.– On définit

$$\widetilde{\chi}_{ij}(\vec{q},\omega) = \int \mathrm{d}t\mathrm{d}\vec{r}\,\chi_{ij}(\vec{r},t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{q}\cdot\vec{r}+\mathrm{i}\omega t} \tag{7}$$

On suppose l'aimantation selon Oz : $\vec{M} = \vec{u}_z\,M_0$. On s'intéresse aux composantes $\chi_{xx} = \chi_{yy}$ et $\chi_{xy} = -\chi_{yx}$ (pour un système isotrope). Montrer que celles-ci obéissent au système d'équations :

$$\mathrm{i}[\omega - v(0)]\,\widetilde{\chi}_{xx}(\vec{q},\omega) = M_0\,[\tilde{v}(\vec{q}) - \tilde{v}(0)]\,\widetilde{\chi}_{xy}(\vec{q},\omega) \tag{8}$$
$$\mathrm{i}[\omega - v(0)]\,\widetilde{\chi}_{xy}(\vec{q},\omega) = -M_0\,[\tilde{v}(\vec{q}) - \tilde{v}(0)]\,\widetilde{\chi}_{xx}(\vec{q},\omega) + M_0 \tag{9}$$

où $\tilde{v}(\vec{q}) \stackrel{\text{def}}{=} \int \mathrm{d}\vec{r}\,v(\vec{r})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{q}\cdot\vec{r}}$

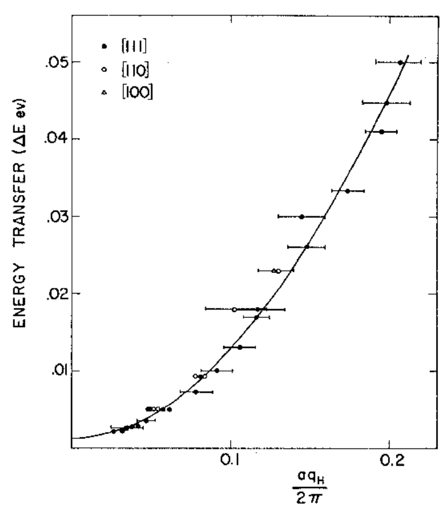

FIG. 2. The energy transfer ΔE as a function of the reduced vector of the spin waves. The error bars are about half of the full width at half maximum of the neutron groups. The solid line is the best fit to Eq. (3).

FIGURE 1 – *R. N. Sinclair & B. N. Brockhouse, Phys. Rev.* **120***(5), 1638 (1960). Expérience de diffusion de neutrons par un alliage de cobalt avec 8% de fer (fcc).*

7/ Magnons.–

a/ Résoudre le système. Montrer que les susceptibilités divergent sur une ligne $\omega = \omega_{\vec{q}}$. Donner l'expression de $\omega_{\vec{q}}$ (la relation de dispersion). Interpréter physiquement cette divergence.

b/ La divergence de $\widetilde{\chi}_{ij}(\vec{q},\omega)$ se produit-elle vraiment pour $\omega \in \mathbb{R}$? À quel principe ce problème est-il relié ?

c/ À quelle(s) condition(s) le développement de la transformée de Fourier du potentiel pour $\vec{q} \to 0$ est-il de la forme : $\tilde{v}(\vec{q}) \simeq \tilde{v}(0) - \frac{A}{2}\vec{q}^{\,2}$. Relier A à une propriété du potentiel. Déduire que la relation de dispersion des magnons est quadratique, $\omega_{\vec{q}} \underset{\vec{q}\to 0}{\simeq} \text{cste} + \frac{\vec{q}^{\,2}}{2m^*}$, et exprimer la masse effective m^* en terme du potentiel et de l'aimantation.

d/ Ferromagnétique isotrope - théorème de Goldstone.– À quoi correspondent les magnons de vecteur $\vec{q} \to 0$? Déduire la valeur de $v(0)$ dans un ferromagnétique isotrope.

Rq : ce résultat est lié au **théorème de Goldstone**. Dans un ferromagnétique isotrope, alors que l'hamiltonien est invariant par rotation, sous la température de Curie le système fixe son aimantation dans une certaine direction. L'état fondamental (la phase ferro) possède une symétrie, $SO(2)$, plus basse que celle de l'hamiltonien, $SO(3)$. On parle de *brisure spontanée* d'une symétrie continue. Ce phénomène s'accompagne de l'apparition de *modes de Goldstone*, des modes collectifs non massifs (sans gap) [2]. L'origine de ce(s) mode(s) vient de la possibilité de tourner l'aimantation globale du ferromagnétique sans coût énergétique.

e/ Commenter la figure 1. L'expérience pour un alliage de cobalt avec 8% de fer trouve $\hbar\omega_q \simeq C + \frac{1}{2}JSa^2\,\vec{q}^{\,2}$ où $JS \simeq 14.7\,\text{meV}$ et $C \simeq 1.3\,\text{meV}$. En supposant un paramètre de maille $a \sim 1\mathring{A}$, donner la valeur de la masse effective en unité de masse de l'électron.

8/ Loi de Bloch.– On admet que les fluctuations de l'aimantation $\delta M(T)$ sont proportionnelles au nombre de modes de magnons excités thermiquement. Donner la densité de modes $\rho_M(\omega)$ et déduire le comportement de δM avec T et M (on ne s'intéresse pas aux préfacteurs numériques).

2. ne pas confondre la notion de mode *massif* avec la masse effective m^* introduite ci-dessus. Dans la terminologie standard, un mode massif correspond à des excitations avec un gap fini. L'origine de cette terminologie vient de la structure de la fonction de Green $\langle r | \frac{1}{-\Delta + m^2} | 0 \rangle$ associée à une relation de dispersion $k^2 + m^2$. La quantité m joue le rôle de gap dans le spectre de l'opérateur (ou de masse dans une théorie relativiste $\partial_t^2\phi = (-\Delta + m^2)\phi$).