Correction de l'examen partiel de physique statistique du 9 mars 2016

# 1 Équation d'état de particules ultrarelativistes

**A. Préliminaires.–** Quelques propriétés de l'ensemble grand canonique.

**1/** La fonction de partition *grand canonique* est $\Xi(\mu) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_\ell \mathrm{e}^{-\beta(E_\ell-\mu N_\ell)}$, où la somme porte sur les microétats du système pour différents nombres de particules. Si l'on effectue la somme en deux étapes $\sum_\ell = \sum_{N=0}^\infty \sum_{\ell \text{ t.q. } N_\ell=N}$ nous obtenons

$$\Xi(\mu) = \sum_{N=0}^\infty \mathrm{e}^{\beta\mu N} Z(N) \tag{12}$$

où $Z(N)$ est la fonction de partition *canonique* du problème à $N$ particules.

**2/** La distribution grand canonique est $P_\ell^{\mathrm{G}} = \Xi^{-1}\,\mathrm{e}^{-\beta(E_\ell-\mu N_\ell)}$. Nous déduisons $\overline{N}^{\mathrm{G}} = \sum_\ell P_\ell^{\mathrm{G}}\, N_\ell = \frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial\mu}\ln\Xi(\mu)$ et $\overline{E}^{\mathrm{G}} - \mu\,\overline{N}^{\mathrm{G}} = -\frac{\partial}{\partial\beta}\ln\Xi(\mu)$.

**3/** La pression grand canonique est définie comme $p^{\mathrm{G}} \stackrel{\text{def}}{=} -\partial J/\partial V$. Puisque seul le volume est extensif parmi les trois arguments du grand potentiel, nous avons $J \propto V$ et donc $p^{\mathrm{G}}(T,\mu) = -J(T,V,\mu)/V$.

**B. Traitement classique.–** Gaz de particules ultrarelativistes **sans interaction**, avec $\varepsilon_{\vec p} = ||\vec p||c$.

**1/** Fonction de partition canonique pour une particule :

$$z = \frac{1}{h^3}\int_V \mathrm{d}^3\vec r \int \mathrm{d}^3\vec p\,\mathrm{e}^{-\beta||\vec p||c} = \frac{4\pi V}{h^3}\underbrace{\int_0^\infty \mathrm{d}p\,p^2\,\mathrm{e}^{-\beta\,p\,c}}_{=\Gamma(3)/(\beta\,p\,c)^3} = \frac{V}{\lambda_T^3} \qquad \text{avec } \lambda_T \stackrel{\text{def}}{=} \pi^{2/3}\frac{\hbar c}{k_B T}\,.$$

**2/** Dans la limite classique (Maxwell-Boltzmann) on a $Z(N) = z^N/N!$, d'où

$$\Xi = \sum_{N=0}^\infty \frac{\left(\mathrm{e}^{\beta\mu}z\right)^N}{N!} = \exp\left[\mathrm{e}^{\beta\mu}z\right] \qquad \Rightarrow \qquad J = -\frac{1}{\beta}\,z\,\mathrm{e}^{\beta\mu}\,.$$

**3/** On déduit $n = \overline{N}^{\mathrm{G}}/V = \mathrm{e}^{\beta\mu}\,z/V$ puis $p^{\mathrm{G}} = -J/V = \mathrm{e}^{\beta\mu}\,z/(V\beta) = nk_BT$. On a retrouvé l'équation d'état des gaz parfaits classiques.

**4/** Nous utilisons $z \propto \beta^{-3}$ et $\ln\Xi = -\beta J = z\,\mathrm{e}^{\beta\mu} = \overline{N}^{\mathrm{G}}$, d'où

$$\overline{E}^{\mathrm{G}} - \mu\,\overline{N}^{\mathrm{G}} = \frac{\partial}{\partial\beta}(\beta J) = -\frac{3}{\beta}(\beta J) + \mu(\beta J) \qquad \Rightarrow \qquad \overline{E}^{\mathrm{G}} = -3\,J = 3p^{\mathrm{G}}V = 3\overline{N}^{\mathrm{G}}k_BT\,.$$

**C. Équation d'état des photons**

**1/ Oscillateur harmonique quantique.–** La fonction de partition canonique est $z_\omega = 1/\left[2\,\mathrm{sh}(\beta\hbar\omega/2)\right]$. L'énergie moyenne est donc $\overline{\varepsilon}^{\mathrm{C}} = (\hbar\omega/2)\coth(\beta\hbar\omega/2)$, d'où $\overline{n}_\omega = 1/\left(\mathrm{e}^{\beta\hbar\omega}-1\right)$ (en utilisant $\coth(x/2) = (\mathrm{e}^x+1)/(\mathrm{e}^x-1) = 1+2/(\mathrm{e}^x-1)$.

**2/ Gaz de photons.–** Nombre moyen et énergie moyenne du gaz de photons :

$$\overline{N}^{\text{G}} = \int_0^\infty \mathrm{d}\omega\,\rho(\omega)\,\overline{n}_\omega = \frac{V(k_BT)^3}{\pi^2(\hbar c)^3}\Gamma(3)\zeta(3)$$
$$\overline{E}^{\text{G}} = \int_0^\infty \mathrm{d}\omega\,\rho(\omega)\,\hbar\omega\,\overline{n}_\omega = \frac{V(k_BT)^4}{\pi^2(\hbar c)^3}\Gamma(4)\zeta(4) = 3\frac{\zeta(4)}{\zeta(3)}\overline{N}^{\text{G}}\,k_BT$$

**3/** Puisque $\overline{E}^{\text{G}} = -3\,J$ on obtient la pression $p^{\text{G}} = \overline{E}^{\text{G}}/(3V)$ d'où finalement

$$p^{\text{G}} = \underbrace{\frac{\pi^4}{90\,\zeta(3)}}_{=0.900\,343...}\;nk_BT\,. \tag{13}$$

L'effet du postulat de symétrisation est d'introduire le facteur $\zeta(4)/\zeta(3) \simeq 0.9$ dans l'équation d'état.

## 2 Fluctuations électriques et théorème de Johnson-Nyquist

**1/ Théorème d'équipartition.–** On considère un Hamiltonien $H(\xi,\chi) = c\,(\xi^2+\chi^2)$, fonction des deux variables $\xi$ et $\chi$ variant continûment sur $\mathbb{R}$, où $c$ est une constante.

*a*) La fonction de partition canonique est $Z_\beta \propto \int \mathrm{d}\xi\mathrm{d}\chi\,\mathrm{e}^{-\beta c(\xi^2+\chi^2)} \propto (1/\sqrt{\beta})(1/\sqrt{\beta})$. Chaque terme quadratique contribue à la moyenne comme $-\partial_\beta \ln(1/\sqrt{\beta}) = k_BT/2$. D'où $\langle\xi^2\rangle = \langle\chi^2\rangle = k_BT/(2c)$.

*b*) Si on introduit la variable complexe $z \stackrel{\text{def}}{=} \xi + \mathrm{i}\chi$, nous écrivons $H = c\,|z|^2$. Nous déduisons $\langle z^2\rangle = \langle\xi^2\rangle - \langle\chi^2\rangle = 0$ (évidemment $\langle\xi\chi\rangle = \langle\xi\rangle\langle\chi\rangle = 0$) et $\langle|z|^2\rangle = \langle\xi^2\rangle + \langle\chi^2\rangle = k_BT/c$.

**2/ Variables conjuguées et hamiltonien.–** Les charges $Q_n$ sont les « coordonnées ». Les « impulsions » sont $P_n = L\sum_{m=n}^\infty I_m$ d'où $I_n = (P_n - P_{n+1})/L$ et l'expression du hamiltonien (4)

**3/** La fonction de partition canonique est

$$Z_\beta = \int \prod_n \left(\frac{\mathrm{d}Q_n\mathrm{d}P_n}{h}\right)\mathrm{e}^{-\beta\,H(\{Q_n,P_n\})}\,.$$

On pourrait intégrer sur les charges mais les couplages entre moments $P_n$ rendent les intégrations sur ceux-ci problématiques...

**4/ Modes propres.–** En introduisant les coordonnées normales $\{q_k, p_k\}$ on diagonalise la forme quadratique (on découple les coordonnées). L'intégrale multiple est maintenant *séparable* et il devient facile de calculer les intégrales (elles sont gaussiennes) ; il en résulte (pas demandé)

$$Z_\beta = \prod_{k\in[0,\pi]}\int \frac{\mathrm{d}^2p_k\mathrm{d}^2q_k}{h^2}\exp\left\{-\beta\left(\frac{4\sin^2(k/2)}{L}\,|p_k|^2 + \frac{1}{C}\,|q_k|^2\right)\right\} = \prod_{k\in[0,\pi]}\frac{1}{h^2}\,\frac{\pi L}{4\sin^2(k/2)\beta}\,\frac{\pi C}{\beta}$$

où $\mathrm{d}^2q_k \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{d}\,\mathrm{Re}\,q_k\,\mathrm{d}\,\mathrm{Im}\,q_k$. Finalement, en introduisant $\omega_k = 2\omega_{\text{LC}}\,|\sin(k/2)|$ où $\omega_{\text{LC}} = 1/\sqrt{LC}$, on retrouve la structure bien connue

$$Z_\beta = \prod_{k\in[0,\pi]}\frac{1}{(\hbar\beta\omega_k)^2}$$

(chaque mode – un couple de coordonnées complexes – équivaux à *deux* oscillateurs 1D). Puisque les coordonnées normales sont *découplées* on a (question **1**.*b*)

$$\langle p_k p_{-k'}\rangle = \langle p_k p_{k'}^*\rangle = \delta_{k,k'}\,\frac{k_BT\,L}{4\sin^2(k/2)}$$

**5/ Fluctuations thermiques du courant**

*a*) On décompose le courant sur les coordonnées normales :

$$I_n = \frac{P_n - P_{n+1}}{L} = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{N}}L}\sum_{k\in[-\pi,\pi]} p_k\,\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}kn} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}k(n+1)}\right)$$

On peut moyenner

$$\left\langle I_n^2\right\rangle = \frac{1}{\mathcal{N}L^2}\sum_{k\in[-\pi,\pi]}\left\langle |p_k|^2\right\rangle\left|1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}k}\right|^2 = \frac{1}{L^2}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{\mathrm{d}k}{2\pi}\,\frac{k_BT\,L}{4\sin^2(k/2)}\left|1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}k}\right|^2 = \frac{k_BT}{L}$$

On retrouve le résultat du théorème d'équipartition puisque le terme de l'énergie est $LI_n^2/2$ il vaut en moyenne $k_BT/2$. Évidemment ! (On aurait pu considérer les courants comme des coordonnées). On a transpiré pour rien... ☹. Si $L\nearrow$ alors le bruit de *courant* diminue (on verra plus bas que le bruit de *tension* augmente).

A.N : Pour $L = 5\times 10^{-8}$ Henry nous obtenons $\delta I \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\langle I_n^2\rangle} \simeq 3\,\mu$A.

*b*) (Bonus) Analyser les corrélations temporelles du courant $I_n(t)$ n'est pas plus difficile : il suffit de rajouter les exponentielles $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_k t}$ dans le calcul précédent ☺ :

$$\left\langle I_n(t)I_n(t')\right\rangle = \frac{k_BT}{L}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{\mathrm{d}k}{2\pi}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_k(t-t')}$$

En utilisant que l'intégrale est réelle et en effectuant un changement de variable, on obtient

$$\langle I_n(t)I_n(t+\tau)\rangle = \frac{k_BT}{L}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\omega_{\mathrm{LC}}\tau\,\cos\theta} \qquad\Rightarrow\qquad \boxed{\langle I_n(t)I_n(t+\tau)\rangle = \frac{k_BT}{L}\,J_0(2\omega_{\mathrm{LC}}\tau)}$$

où $J_0$ est la Bessel.

*c*) **Théorème de Johnson-Nyquist.–** La fonction de Bessel est une fonction oscillante et décroissante ; on peut écrire $J_0(2\omega_{\mathrm{LC}}\tau) = \tilde\delta(t)/\omega_{\mathrm{LC}}$ où $\int_{\mathbb{R}}\mathrm{d}t\,\tilde\delta(t) = 1$. Finalement

$$\langle I_n(t)I_n(t+\tau)\rangle = \frac{k_BT}{L\omega_{\mathrm{LC}}}\,\tilde\delta(t) = \frac{k_BT}{R}\,\tilde\delta(t) \tag{14}$$

où $R \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{L/C}$ est la résistance électrique de la ligne semi-infinie. En général, les analyseurs de bruit ont une certaine bande passante et mesurent plutôt le « *spectre de bruit* » $S_I(\omega) = \int\mathrm{d}\tau\,\langle I_n(t)I_n(t+\tau)\rangle\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\tau}$. À basse fréquence, le bruit de courant est donc inversement proportionnel à la résistance électrique $S_I \equiv S_I(\omega=0) = k_BT/R$.

*d*) En utilisant $I = V/R$ nous obtenons le bruit de tension $S_V = k_BT\,R$. La mesure de Johnson (1928) montre bien la proportionnalité entre le spectre de bruit et la résistance électrique.

**Remarque :** on a comparé ici le spectre de bruit dans la ligne infinie avec la résistance de la ligne *semi*-infinie. Il eût été plus cohérent de comparer les deux quantités dans la même configuration, ce qui fait appraître un facteur 2. Le théorème de Johnson-Nyquist prend la forme générale pour le spectre de bruit

$$\boxed{S_V(\omega) = 2k_BT\ \mathrm{Re}\left[Z(\omega)\right]}$$

en fonction de l'impédance (i.e. $R = Z(0)$).