Examen partiel de Physique statistique
Mercredi 9 mars 2016

Durée de l'épreuve : **2 heures.**

L'utilisation de documents, téléphones portables, calculatrices, ... est interdite.

Recommandations :

Lisez attentivement l'énoncé et rédigez *succinctement* et *clairement* votre réponse.
Vérifiez vos calculs (analyse dimensionnelle, etc) ; n'oubliez pas de vous **relire**.
⚠ Pensez aux **informations en annexe**. ⚠

1 Équation d'état de particules ultrarelativistes

A. Préliminaires.– On rappelle quelques propriétés de l'ensemble grand canonique qui seront utiles. Considérons un système à température T et potentiel chimique μ.

1/ Rappeler la définition de la fonction de partition *grand canonique* $\Xi(\mu)$. Donner la relation entre $\Xi(\mu)$ et la fonction de partition *canonique* $Z(N)$ du problème à N particules.

2/ Montrer comment déduire $\overline{N}^{\mathrm{G}}$ et $\overline{E}^{\mathrm{G}} - \mu\,\overline{N}^{\mathrm{G}}$ à partir de $\ln\Xi$, où E est l'énergie.

3/ Pour un fluide simple le grand potentiel est seulement fonction de trois grandeurs $J(T,V,\mu)$ où V est le volume. Justifier que la pression grand canonique est alors donnée par $p^{\mathrm{G}} = -J/V$.

B. Traitement classique.– On considère un gaz de particules ultrarelativistes **sans interaction** dont la relation de dispersion est $\varepsilon_{\vec{p}} = ||\vec{p}||c$. Le gaz est contenu dans un volume V et maintenu à température T et potentiel chimique μ.

1/ Problème à une particule.– Exprimer la fonction de partition *canonique* z pour une particule sous la forme d'une intégrale dans l'espace des phases. Calculer l'intégrale. Donner l'expression de la longueur thermique λ_T, définie par $z = V/\lambda_T^3$.

2/ Rappeler la forme approchée de la fonction de partition canonique $Z(N)$ dans la limite (classique) de Maxwell-Boltzmann. En utilisant la relation entre $\Xi(\mu)$ et $Z(N)$, montrer que le grand potentiel prend alors la forme

$$J = -\frac{1}{\beta}\, z\, \mathrm{e}^{\beta\mu}\,. \tag{1}$$

3/ Déduire la densité moyenne $n = \overline{N}^{\mathrm{G}}/V$ puis la pression p^{G} en fonction de T et μ. Exprimer la pression en fonction de n et T.

4/ Montrer que pour le gaz ultrarelativiste

$$\overline{E}^{\mathrm{G}} = -3\,J \tag{2}$$

(notons que la relation est très générale et ne repose pas sur l'approximation de Maxwell-Boltzmann ; elle est une conséquence de la relation de dispersion linéaire $\varepsilon_{\vec{p}} \propto ||\vec{p}||$). Exprimer l'énergie moyenne du gaz $\overline{E}^{\mathrm{G}}$ en fonction de $\overline{N}^{\mathrm{G}}$ et k_BT puis en fonction de p^{G} et V.

C. Équation d'état des photons

1/ Préliminaire : oscillateur harmonique quantique.– Le spectre des énergies d'un oscillateur harmonique quantique est $\varepsilon_n = \hbar\omega(n+1/2)$, $n \in \mathbb{N}$. Calculer la fonction de partition canonique z_ω de l'oscillateur. Montrer que le nombre d'excitation moyen $\overline{n}_\omega$, défini par $\overline{\varepsilon}^{\mathrm{C}} = \hbar\omega(\overline{n}_\omega + 1/2)$, est donné par (distribution de Bose-Einstein)

$$\overline{n}_\omega = \frac{1}{\mathrm{e}^{\beta\hbar\omega} - 1} \tag{3}$$

2/ Gaz de photons.– On rappelle que l'énergie électromagnétique s'écrit comme la somme des énergies d'oscillateurs harmoniques. Le nombre d'oscillateurs ayant des pulsations $\in [\omega, \omega + \mathrm{d}\omega]$ est $\rho(\omega)\,\mathrm{d}\omega$ où la densité des modes électromagnétiques est $\rho(\omega) = V\,\omega^2/(\pi^2 c^3)$ pour $\omega > 0$. Le nombre de photons (d'énergie $\hbar\omega$) dans le mode est $\overline{n}_\omega$. Exprimer le nombre moyen $\overline{N}^{\mathrm{G}}$ de photons et l'énergie moyenne $\overline{E}^{\mathrm{G}}$ sous la forme de deux intégrales que l'on calculera.

3/ Déduire la pression (sans calcul supplémentaire) à l'aide de la relation (2). Montrer que l'on peut écrire la pression comme $p = \kappa\, n k_B T$ où $n = \overline{N}^{\mathrm{G}}/V$ est la densité moyenne de photons et κ un nombre sans dimension dont on précisera la valeur numérique. Commenter.

2 Fluctuations électriques et théorème de Johnson-Nyquist

1/ Préliminaire : théorème d'équipartition.– On considère un Hamiltonien $H(\xi,\chi) = c\,(\xi^2 + \chi^2)$, fonction des deux variables ξ et χ variant continûment sur $\mathbb{R}$, où c est une constante.

a) Calculer la fonction de partition Z_β (à une constante multiplicative près). Énoncer le théorème d'équipartition de l'énergie. Déduire $\langle\xi^2\rangle$ et $\langle\chi^2\rangle$.

b) On écrit $H = c\,|z|^2$ où l'on a introduit la variable complexe $z \overset{\text{def}}{=} \xi + \mathrm{i}\chi$. Déduire $\langle z^2\rangle$ et $\langle |z|^2\rangle$ de la question précédente.

Introduction.– Dans un circuit électrique à l'équilibre (en l'absence de source de courant ou de tension), le courant électrique est nul *en moyenne* mais présente des *fluctuations* à cause de l'agitation thermique. Nous allons étudier ces fluctuations dans une ligne de transmission électrique (figure 1), que nous modélisons comme une suite de bobines et de condensateurs pour tenir compte des effets inductifs et capacitifs. Nous appelons Q_n la charge sur le condensateur n et I_n le courant dans la bobine n. L'énergie électrique stockée dans la ligne est la somme d'un terme « cinétique » $E_L = L/2\sum_n I_n^2$, où L est l'inductance des bobines, et d'un terme « potentiel » $E_C = 1/(2C)\sum_n Q_n^2$, où C est la capacité des condensateurs. À chaque nœud on a $I_n = \dot{Q}_n + I_{n-1}$, i.e. $I_n = \sum_{m=-\infty}^{n} \dot{Q}_m$.

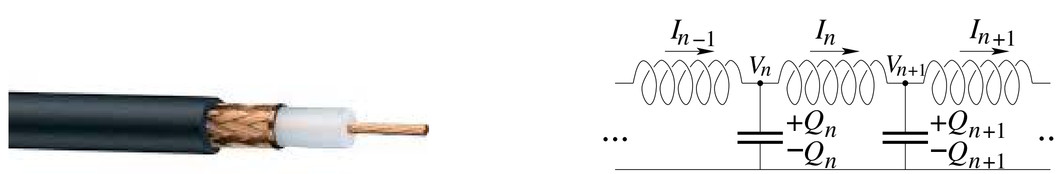

FIGURE 1 : *Un cable coaxial (ligne de transmission) peut être modélisé comme une série d'inductances et de capacités.*

2/ Variables conjuguées et hamiltonien.– Si nous traitons les charges Q_n comme des « coordonnées », les variables canoniquement conjuguées (les « impulsions ») sont définies comme $P_n \overset{\text{def}}{=} \partial E_L/\partial\dot{Q}_n = L\sum_{m=n}^{\infty} I_m$. Exprimer le courant I_n en fonction des variables conjuguées et montrer que la fonction de Hamilton est

$$H(\{Q_n,P_n\}) = \sum_n \left[\frac{(P_n - P_{n+1})^2}{2L} + \frac{1}{2C} Q_n^2 \right] . \tag{4}$$

3/ On considèrera maintenant une ligne de taille finie de $\mathcal{N}$ couples bobine-condensateur et l'*on négligera les effets de bord*. Écrire la fonction de partition canonique Z_β d'une ligne sous la forme d'une intégrale multiple. Quelle est la difficulté pour calculer Z_β ?

4/ Modes propres.– On introduit les coordonnées normales associées aux modes propres :

$$q_k \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{\mathcal{N}}} \sum_{n=1}^{\mathcal{N}} Q_n \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kn} \qquad \text{et} \qquad p_k \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{\mathcal{N}}} \sum_{n=1}^{\mathcal{N}} P_n \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kn} \qquad \text{où } k \in [-\pi, \pi] \tag{5}$$

(notons que dans la chaîne finie, le vecteur d'onde est quantifié : $k = 2\pi m/\mathcal{N}$ avec m entier). Il est alors facile de vérifier que l'hamiltonien (4) prend la forme

$$H = \sum_{k\in[0,\pi]} \left(\frac{4\sin^2(k/2)}{L} \, |p_k|^2 + \frac{1}{C} \, |q_k|^2 \right) \tag{6}$$

Quel est l'intérêt des nouvelles coordonnées $\{q_k, p_k\}$ (par exemple pour le calcul de Z_β) ? Justifier que la moyenne canonique du produit de deux coordonnées normales est de la forme $\langle p_k p_{-k'} \rangle = \left\langle p_k p_{k'}^* \right\rangle = \delta_{k,k'}/c_k$, où l'on précisera la valeur de c_k.

5/ Fluctuations thermiques du courant

a) En utilisant $P_n = (1/\sqrt{\mathcal{N}}) \sum_{k\in[-\pi,\pi]} p_k \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kn}$, justifier que le courant s'exprime en termes des coordonnées normales comme

$$I_n = \frac{1}{L} \frac{1}{\sqrt{\mathcal{N}}} \sum_{k\in[-\pi,\pi]} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kn} (1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}k}) \, p_k \, . \tag{7}$$

Exprimer les fluctuations $\left\langle I_n^2 \right\rangle$ sous la forme d'une intégrale (utiliser $(1/\mathcal{N}) \sum_{k\in[-\pi,\pi]} = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\mathrm{d}k}{2\pi}$). Déduire $\left\langle I_n^2 \right\rangle$ en fonction de T et L. Le résultat est-il surprenant ? Doit-on augmenter ou diminuer l'inductance pour minimiser le bruit électrique ?

A.N : calculer les fluctuations de courant $\delta I \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\langle I_n^2 \rangle}$ pour $L = 5 \times 10^{-8}$ Henry (le Henry est l'unité S.I.) à $T = 300\,\mathrm{K}$.

b) (Bonus) Nous analysons les corrélations temporelles du courant $I_n(t)$. Il suffit de faire $p_k \longrightarrow p_k \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_k t}$ dans (7), où $\omega_k = 2\omega_{\mathrm{LC}} \, |\sin(k/2)|$ est la fréquence propre (avec $\omega_{\mathrm{LC}} = 1/\sqrt{LC}$). En reprenant le calcul du **5**.*a*, montrer que la fonction de corrélation $\langle I_n(t) I_n(t+\tau) \rangle$ s'exprime à l'aide de la fonction de Bessel J_0 (cf. annexe).

c) (Bonus) **Théorème de Johnson-Nyquist.–** En utilisant les propriétés de J_0 (cf. annexe), montrer que

$$\boxed{\langle I_n(t) I_n(t+\tau) \rangle = \frac{k_B T}{R} \, \tilde{\delta}(\tau)} \tag{8}$$

où $R = \sqrt{L/C}$ est la résistance électrique de la ligne semi-infinie et $\tilde{\delta}(\tau)$ une fonction « étroite » telle que $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}t \, \tilde{\delta}(t) = 1$.

d) (Bonus) Le bruit électrique aux bornes d'une résistance a été mesuré par Johnson en 1928. Commenter la figure où est représenté le spectre de bruit de *tension* $\overline{|V_\omega|^2} \stackrel{\text{def}}{=} \int \mathrm{d}\tau \, \langle V(t) V(t+\tau) \rangle$ en fonction de la résistance R.

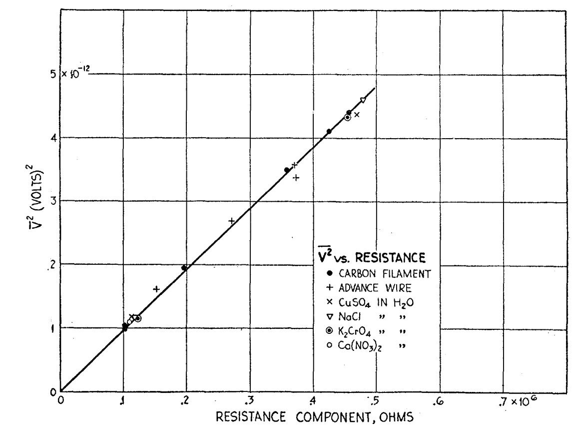

FIGURE 2 : *Spectre de bruit de tension en fonction de la résistance. Figure tirée de :* J. B. Johnson, *Thermal agitation of electricity in conductors*, Phys. Rev. **32**, 97–109 (1928).

Annexe

• Fonction Gamma

$$\Gamma(z) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\infty \mathrm{d}t\, t^{z-1}\, \mathrm{e}^{-t} \tag{9}$$

Relation fonctionnelle : $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$. Quelques valeurs : $\Gamma(n+1) = n!$ et $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

• Des intégrales

$$\int_0^\infty \mathrm{d}t\, \frac{t^{\alpha-1}}{\mathrm{e}^t - 1} = \Gamma(\alpha)\, \zeta(\alpha) \tag{10}$$

où $\zeta(2) = \pi^2/6$, $\zeta(3) \simeq 1.202$, $\zeta(4) = \pi^4/90$, etc

• La fonction de Bessel

$$J_0(x) = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\mathrm{d}k}{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cos k} \tag{11}$$

présente les comportements limites : $J_0(x) \simeq 1 - x^2/2$ pour $x \ll 1$ et $J_0(x) \simeq \sqrt{2/(\pi x)}\, \cos(x - \pi/4)$ pour $x \gg 1$. Son intégrale est $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\, J_0(x) = 2$.

• Constantes : $\hbar = 1.05 \times 10^{-34}$ J.s, $k_B = 1.38 \times 10^{-23}$ J/K.