

EXAMEN DE PHYSIQUE STATISTIQUE I

Mardi 3 janvier 2017

*Durée de l'épreuve : 2 heures.**L'utilisation de documents, téléphones portables, calculatrices, ... est interdite.***Recommandations :**Lisez attentivement l'énoncé et rédigez *succinctement* et *clairement* votre réponse.Vérifiez vos calculs (analyse dimensionnelle, etc) ; n'oubliez pas de vous **relire**.**⚠** Pensez aux **informations en annexe**. **⚠****1 Distribution de Maxwell****A. Question de cours**

1/ Énoncer le postulat fondamental de la physique statistique.

2/ Donner l'expression générale de l'entropie microcanonique, notée S^* (définir toutes les quantités introduites).**B. Gaz parfait monoatomique.**— On considère un gaz parfait de N atomes confinés dans une boîte de volume V , décrits par l'hamiltonien

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{\vec{p}_i^2}{2m} \quad \text{avec } \vec{r}_i \in \text{volume } V. \quad (1)$$

On se place dans un cadre **classique**.1/ Décrire les microétats du système. Donner l'expression du nombre $\Phi_N(E)$ de microétats ayant une énergie inférieure à E sous la forme d'une intégrale multiple (sans la calculer).2/ **Entropie.**— On introduit l'intégrale multiple

$$\Sigma_N(E) \stackrel{\text{def}}{=} \int d^3\vec{p}_1 \cdots d^3\vec{p}_N \delta\left(E - \sum_{i=1}^N \frac{\vec{p}_i^2}{2m}\right). \quad (2)$$

a) Justifier que l'entropie microcanonique est donnée par

$$S^*(E, V, N) = k_B \ln [b \Sigma_N(E)], \quad (3)$$

où l'on précisera la valeur de b (notamment sa dépendance en V et N).b) Justifier que l'intégrale multiple (2) dépend de l'énergie comme une loi de puissance $\Sigma_N(E) \propto E^\alpha$ et donner l'expression de l'exposant α (le préfacteur n'est pas demandé).c) Rappeler la définition de la température microcanonique T^* et donner son expression en fonction de E et N .**3/ Distribution de Maxwell.**— On cherche maintenant la distribution de l'impulsion d'un des atomes du gaz, disons l'atome n°1. On note cette densité de probabilité $f(\vec{p}_1)$.a) Justifier que la distribution microcanonique est donnée par $\rho^*(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_N) = C \delta(E - H)$, où H est l'hamiltonien (1). Exprimer la normalisation C en fonction de $\Sigma_N(E)$.

b) Quelle est la relation entre $\rho^*(\dots)$ et $f(\vec{p}_1)$? Montrer que cette dernière est donnée par

$$f(\vec{p}_1) = \frac{\Sigma_{N-1}\left(E - \frac{\vec{p}_1^2}{2m}\right)}{\Sigma_N(E)}. \quad (4)$$

c) Préliminaire : rappeler la valeur de $\lim_{N \rightarrow \infty} (1 + x/N)^N$. En considérant la limite $N \rightarrow \infty$ avec une température T^* fixée dans (4), montrer que l'on retrouve la distribution de Maxwell.

d) En utilisant la distribution de Maxwell, déduire l'énergie cinétique moyenne d'un atome, $\langle \varepsilon_c \rangle = \langle \frac{\vec{p}_1^2}{2m} \rangle$.

2 Théorème H de Boltzmann

Considérons un gaz parfait de N particules dans un volume V et ayant une énergie E , à l'équilibre thermodynamique. On rappelle la formule de Sackur-Tetrode pour son entropie microcanonique

$$S^*(E, V, N) = Nk_B \left[\frac{5}{2} - \ln \left\{ \frac{N}{V} \left(\frac{3\pi\hbar^2 N}{mE} \right)^{3/2} \right\} \right]. \quad (5)$$

1/a) Calculer la température microcanonique du gaz, notée T^* , en fonction des variables E , V et/ou N . Rappeler la définition du potentiel chimique microcanonique μ^* et le calculer.

b) Déduire une expression de l'entropie S^* en fonction de N , T^* , la densité moyenne $n = N/V$ et des autres paramètres microscopiques. De même, exprimer μ^* en fonction de n et T^* .

2/ On considère un tube cylindrique de longueur $2L$ et de section A contenant un gaz parfait monoatomique. Le tube est séparé par une paroi en $x = 0$ en deux parties contenant respectivement $N_1^{(i)}$ et $N_2^{(i)} = N - N_1^{(i)}$ atomes (Fig. 1). **La température est la même dans les deux parties**, égale à T^* . À un certain instant, on fait un trou dans la paroi par lequel les deux gaz s'échangent des atomes. On attend qu'un nouvel équilibre s'établisse. Quelle est la condition d'équilibre? Que valent alors les densités moyennes n_1 et n_2 dans les deux volumes?

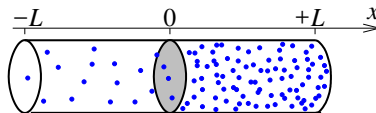


FIGURE 1 : Un tube cylindrique est séparé en deux.

3/ **Entropie pour une densité non homogène.**— Nous supposons maintenant, qu'à cause de contraintes extérieures, la densité dans le tube est spatialement inhomogène (Fig. 2). Pour simplifier nous considérons le cas où la densité $n(x)$ dépend uniquement de l'abscisse $x \in [-L, +L]$, et varie "lentement". Nous allons construire une expression de l'entropie dans cette situation, en supposant que **la température T^* est fixée et indépendante de x** .

On divise par la pensée le tube en tranches d'épaisseurs "infinitésimales" Δx , où Δx est très grand par rapport aux longueurs microscopiques et $\Delta x \ll L$. Les contraintes sont telles que dans chaque tranche $[x, x + \Delta x]$, le gaz est à l'équilibre microcanonique (*équilibre local*) et on peut y appliquer la formule de Sackur-Tetrode (5).

a) Exprimer l'entropie $\Delta S^*(x)$ de la tranche d'épaisseur Δx située à x en fonction des données.

b) Montrer que l'entropie du gaz peut s'écrire sous la forme

$$S^* = -C \underbrace{\int_{-L}^L dx n(x) \ln \left(\frac{n(x)}{n_0} \right)}_{\stackrel{\text{def}}{=} \widehat{S}} + R(T^*, n_0), \quad (6)$$

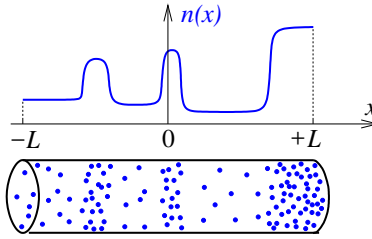


FIGURE 2 : À cause de contraintes extérieures la densité est inhomogène dans le tube et dépend de la coordonnée x .

où n_0 est une densité de référence et le “reste” $R(T^*, n_0)$ dépend de la température et n_0 (mais pas de $n(x)$). Donner l’expression de la constante C . Pourquoi n_0 est-il arbitraire? Choisir $n_0 = N/V$ et donner l’expression de $R(T^*, n_0)$.

c) À un instant initial on relâche les contraintes responsables des inhomogénéités de densité, si bien qu’un nouvel équilibre s’installera. Que vaut \hat{S} dans ce nouvel état d’équilibre? Motiver votre réponse très brièvement.

Pour s’aider : on pourra borner \hat{S} à l’aide de l’inégalité $\ln x \geq 1 - 1/x$.

4/ Dynamique vers l’équilibre.— On sort maintenant du cadre de la physique statistique de l’équilibre et l’on va s’intéresser à l’évolution temporelle du système entre son état initial, caractérisé par une densité inhomogène (Fig. 2), et son état final. L’évolution de la densité, notée $n(x, t)$, est régie par l’équation de la diffusion

$$\frac{\partial n(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n(x, t)}{\partial x^2}, \quad (7)$$

où D est la constante de diffusion. On admettra que l’hypothèse de l’équilibre local reste vraie à tout instant et qu’il est possible de définir une entropie $\hat{S}(t)$ au temps t , simplement donnée en remplaçant $n(x)$ par $n(x, t)$ dans (6). Montrer que

$$\frac{d\hat{S}(t)}{dt} \geq 0 \quad (8)$$

et que l’égalité est satisfaite seulement à l’équilibre.

Indication : Les intégrations par parties génèrent des termes de bord que vous pouvez négliger.

Commentaire : Une inégalité comme (8) pour la dérivée temporelle de l’entropie s’appelle un *théorème H de Boltzmann*.

Annexe :

- Le volume d’une sphère de dimension d et de rayon R est donné par

$$\mathcal{V}_d(R) = \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2 + 1)} R^d \quad (9)$$

- Pour grand argument, la fonction Gamma peut être approximée à l’aide de la formule de Stirling $\ln \Gamma(z) \simeq z \ln z - z$ pour $z \gg 1$.

- On rappelle l’intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$.