

## EXAMEN PARTIEL DE PHYSIQUE STATISTIQUE II

Mercredi 8 mars 2017

*Durée de l'épreuve : 2 heures.**L'utilisation de documents, téléphones portables, calculatrices, ... est interdite.***Recommandations :**Lisez attentivement l'énoncé et rédigez *succinctement* et *clairement* votre réponse.Vérifiez vos calculs (analyse dimensionnelle, etc) ; n'oubliez pas de vous **relire**.**1 Capacité calorifique d'un cristal de spins 1/2 (~ 40 min)**

1/ Donner la forme de la distribution canonique caractérisant l'occupation des microétats d'un système en précisant les conditions de sa dérivation. Définir les différentes grandeurs et notations.

**Cristal de spins.**— On considère un cristal de  $N$  spins 1/2 soumis à un champ magnétique homogène  $\vec{B} = B\vec{u}_z$ . L'hamiltonien du système est

$$H = -\gamma B \sum_{i=1}^N S_z^{(i)} \quad (1)$$

où  $S_z^{(i)}$  est une des composantes de l'opérateur du spin  $i$ , dont les états propres sont notés  $|+\rangle_i$  et  $|-\rangle_i$ ; on a  $S_z^{(i)}|\pm\rangle_i = \pm(\hbar/2)|\pm\rangle_i$ . La constante de couplage  $\gamma$  est le facteur gyromagnétique.

2/ Décrire les microétats et en donner (au moins) deux exemples pour  $N = 5$  spins.

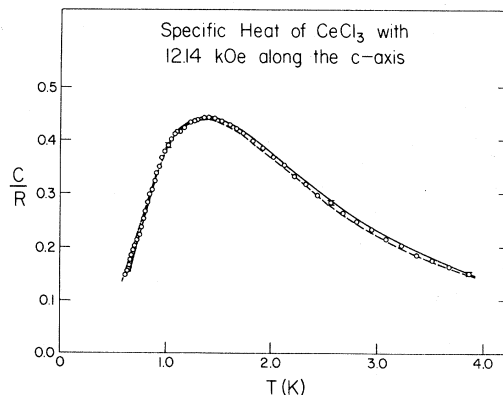


FIGURE 1 : *Capacité calorifique du chlorure de cerium  $\text{CeCl}_3$  soumis à un champ magnétique de  $B = 1.214$  Tesla (1 Oersted correspond à 1 Gauss =  $10^{-4}$  Tesla). Figure tirée de : D. P. Landau, J. C. Doran and B. E. Keen, *Physical Review B* **7**, p. 4961 (1973).*

3/ On supposera les conditions remplies pour décrire le cristal dans le cadre de l'ensemble canonique.

a) Quelle est la relation entre la fonction de partition du cristal de  $N$  spins  $Z_{\text{cristal}}$  et celle d'un spin unique  $z_{\text{spin}}$ ? Rappeler la démonstration de ce résultat.

b) Expliciter le lien entre la distribution canonique et la distribution  $p_{\pm}$  d'occupation d'un état individuel (i.e.  $p_{\pm}$  est la probabilité pour qu'un spin particulier soit dans l'état  $|\pm\rangle_i$ ).

c) Exprimer  $z_{\text{spin}}$  et les probabilités  $p_+$  et  $p_-$  en fonction de  $\beta \stackrel{\text{def}}{=} 1/(k_B T)$  et  $\varepsilon_B \stackrel{\text{def}}{=} \hbar\gamma B/2$  (supposée  $> 0$ ). Tracer ces probabilités en fonction de  $T$ . Interpréter physiquement ces courbes.

4/ D eduire l'énergie moyenne du cristal  $\overline{E}_{\text{cristal}}^{\text{C}}$ . Tracer-la en fonction de  $B/T$  et expliquer physiquement le comportement.

5/ **Anomalie de Schottky.**– Calculer la capacité calorifique  $C(T) \stackrel{\text{def}}{=} \partial \overline{E}_{\text{cristal}}^{\text{C}} / \partial T$ . D eduire les comportements limites pour  $k_B T \ll \varepsilon_B$  et  $k_B T \gg \varepsilon_B$ . Expliquer physiquement ces comportements limites en s'appuyant sur ceux des probabilités  $p_{\pm}$ . Tracer *très soigneusement*  $C(T)$  en fonction de  $T$  et comparer aux données expérimentales de la figure.

6/ **A.N. :** La fonction  $x^2 / \text{ch}^2 x$  a son maximum en  $x_* \simeq 1.2$ . Le facteur gyromagnétique s'exprime en terme du facteur de Lang   $g$  (adimensionné) comme  $\gamma = g \mu_B / \hbar$  où  $\mu_B = |q_e| \hbar / (2m_e) \simeq 0.927 \times 10^{-23}$  J/Tesla est le magnéton de Bohr. D eduire de la courbe expérimentale la valeur du facteur de Landé  $g$  pour le chlorure de cérium. [Rq : calculatrice inutile.]

## 2 Détente de Joule-Thomson ( $\sim 1\text{h}20$ min)

**Introduction.**– La détente de Joule-Thomson est une transformation adiabatique (sans échange de chaleur) au cours de laquelle du gaz est échangé entre deux volumes à travers un petit canal bouché par un milieu poreux (ou une valve) : cf. figure 2. L'échange de gaz se produit si l'on pousse sur un piston, jusqu'à ce que le système ait atteint un nouvel équilibre (les gaz n'échangent alors plus rien). On peut montrer qu'à l'équilibre, l'enthalpie par particule,  $H/N$ , est la même dans les deux gaz ; on rappelle que l'enthalpie d'un gaz d'énergie  $E$  et de pression  $p$  dans un volume  $V$  est  $H \stackrel{\text{def}}{=} E + pV$ . L' tat thermodynamique des deux gaz est donc sur la même *isenthalpe*, c'est-à-dire la courbe  $H/N = \text{cste}$  dans le plan  $(p, T)$ .

Pour un gaz parfait, on peut facilement montrer que l'isenthalpe a pour équation  $pT^{5/2} = \text{cste}$ . L'objet du problème est d'étudier l'effet de l'interaction entre atomes sur les isenthalpes.

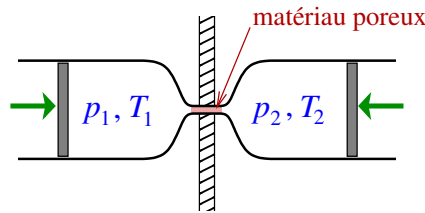


FIGURE 2 : **Détente de Joule-Thomson.** Deux gaz sont séparés par un matériau poreux. Si on pousse sur un piston sans qu'il y ait échange de chaleur, les gaz échangent des particules jusqu'à atteindre l'équilibre où  $H_1/N_1 = H_2/N_2$  ( galit  des enthalpies par particule).

On considère un gaz de  $N$  **atomes** en interaction décrit par l'hamiltonien

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^N \frac{\vec{p}_i^2}{2m} + \sum_{i<j} v(r_{ij}), \quad (2)$$

où  $v(r_{ij})$  est un potentiel d'interaction à deux corps, avec  $r_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \|\vec{r}_i - \vec{r}_j\|$ . Le gaz est contenu dans une enceinte de volume  $V$  maintenue à température  $T$ .

1/ Quels sont les microétats du système (décrit classiquement) ?

2/ Montrer que la fonction de partition canonique peut se mettre sous la forme

$$Z = Z_{\text{GP}} \int \frac{d^3 \vec{r}_1}{V} \cdots \frac{d^3 \vec{r}_N}{V} \prod_{i<j} (1 + f_{ij}) \quad \text{avec } f_{ij} = e^{-\beta v(r_{ij})} - 1 \quad (3)$$

le facteur de Mayer.  $Z_{\text{GP}}$  est la fonction de partition du gaz parfait monoatomique dont on donnera l'expression en fonction de  $V$ ,  $N$  et la longueur thermique  $\lambda_T = \sqrt{2\pi \hbar^2 / (mk_B T)}$ .

**3/ Coefficient du viriel.**— On se place dans un régime dilué où il est légitime de considérer que  $f_{ij} \ll 1$ , ce qui permet d'écrire  $\prod_{i<j}(1 + f_{ij}) \simeq 1 + \sum_{i<j} f_{ij}$ . En utilisant cette approximation, exprimer la fonction de partition canonique en fonction de  $Z_{\text{GP}}$ ,  $N$ ,  $V$  et du *second coefficient du viriel*

$$B_2(T) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \int d^3\vec{r}_{12} \left( 1 - e^{-\beta v(r_{12})} \right). \quad (4)$$

Si le potentiel décroît à l'infini comme  $v(r) \propto r^{-\alpha}$ , quelle condition sur l'exposant  $\alpha$  assure la convergence de l'intégrale à l'infini ?

**4.a)** L'approximation précédente est valable à basse densité  $n = N/V \rightarrow 0$ . Dédurre que

$$\frac{1}{N} \ln Z = \frac{1}{N} \ln Z_{\text{GP}} - n B_2(T) + \mathcal{O}(n^2). \quad (5)$$

*b)* Donner l'énergie libre par atome  $F/N$ . Rappeler la définition de la pression canonique  $p$  et montrer qu'elle présente le comportement  $p = nk_B T [1 + n B_2(T) + \mathcal{O}(n^2)]$ . Discuter le lien entre la nature attractive ou répulsive de l'interaction entre atomes et l'équation d'état (on pourra tracer des isothermes dans le diagramme  $(p, n)$  pour aider la discussion).

*c)* Rappeler comment obtenir l'énergie  $E$  à partir de  $Z$  (on se place à la limite thermodynamique où l'énergie est identifiée avec l'énergie moyenne canonique :  $E \equiv \overline{E^C}$ ). De même que pour la pression, on écrira  $E$  sous la forme  $E = E_{\text{GP}} + E_{\text{int}}$ , où  $E_{\text{GP}}$  est l'énergie du gaz parfait et  $E_{\text{int}}$  la contribution de l'interaction, dont on donnera la forme approchée (pour  $n \rightarrow 0$ ) en fonction de  $B_2$  et des autres paramètres.

**5/ Enthalpie.**— Obtenir une expression de l'enthalpie par atome  $H/N$ , où  $H \stackrel{\text{def}}{=} E + pV$ , en fonction de  $T$  et  $n$  (à partir de **4.a** et **4.b**). Dédurre l'expression de l'enthalpie  $H/N$ , en fonction de  $T$  et  $p$  (utiliser qu'à l'ordre le plus bas en  $p$ , on passe de  $H/N = \tilde{h}(T, n)$  à  $H/N = h(T, p)$  en écrivant simplement  $p \simeq nk_B T$ ).

**6/ Détente de Joule-Thomson.**— On écrit le coefficient du viriel sous la forme

$$B_2(T) = b - \frac{a}{k_B T} \quad (6)$$

où  $a$  et  $b$  sont deux paramètres microscopiques (positifs) caractérisant l'interaction :  $b$  est le volume exclu par l'effet de la forte répulsion à petite distance et  $a$  caractérise l'effet de l'attraction à grande distance (force de van der Waals). (6) correspond au modèle de van der Waals.

*a)* En utilisant cette expression de  $B_2(T)$ , montrer que la condition  $H/N = \text{cste}$  correspond à une famille de lignes dans le plan  $(p, T)$ , séparées par une ligne verticale pour la température  $T_* = 2a/(k_B b)$ . Comparer aux isenthalpes du gaz parfait (cf. § d'introduction).

**A.N. :** Pour l'hélium, on donne  $a \simeq 0.146 \text{ meV} \cdot \text{nm}^3$  et  $b \simeq 0.096 \text{ nm}^3$ . Dédurre  $T_*$  en Kelvin.

*b)* Dans la détente de Joule-Thomson ( $p$  diminue à  $H/N$  fixée), comment varie la température ? Distinguer les cas où la température initiale est supérieure ou inférieure à  $T_*$ . Quelle pourrait être une application pratique ?

## Annexe

- Une intégrale :

$$\int_{\mathbb{R}} dx e^{-\frac{1}{2}ax^2} = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}$$

- On donne  $k_B = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$  et  $|q_e| = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ .