Universités Paris 6 & Paris-Sud, École Normale Supérieure, École Polytechnique.
M2 – Parcours de Physique Quantique

Intégrale de chemin et applications en physique statistique
Examen

Mercredi 17 décembre 2008

1 Distribution du maximum d'un pont brownien

On appelle "*pont brownien*" un mouvement brownien issu de $x = 0$ à $\tau = 0$ et conditionné à revenir à son point de départ après un temps t : $(x(\tau),\, \tau \in [0,t] \,|\, x(0) = x(t) = 0)$. Nous étudions la distribution du maximum M atteint par le pont (figure).

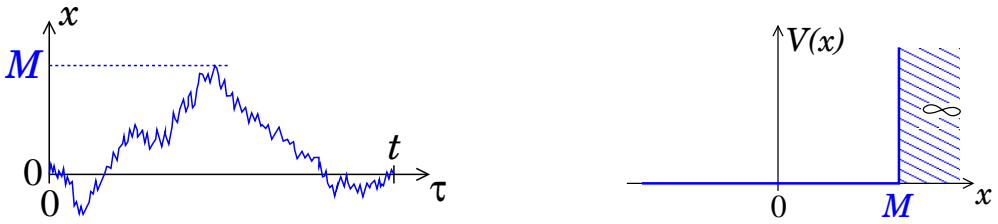


FIGURE 1 – *Maximum M d'un pont brownien.* À droite : *Potentiel $V(x)$ de la question 2.*

1/ On note $H_0 = -\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$ l'opérateur agissant sur les fonctions de $\mathbb{R}$. Calculer le propagateur correspondant $P_0(x,t|x',0) = \langle\, x \,|\mathrm{e}^{-tH_0}|\, x' \,\rangle$.

2/ Nous considérons d'autre part l'opérateur $H_1 = -\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + V(x)$, où $V(x) = 0$ pour $x < M$ et $V(x) = \infty$ pour $x > M$ (figure). Calculer le propagateur $P_1(x,t|x',0) = \langle\, x \,|\mathrm{e}^{-tH_1}|\, x' \,\rangle$.

3/ Nous nous intéressons maintenant à la distribution du maximum M d'un pont brownien. Justifier que

$$\mathrm{Proba}[x(\tau) < M] = \frac{\displaystyle\int_{x(0)=0}^{x(t)=0} \mathcal{D}x(\tau)\, \mathrm{e}^{-\int_0^t \mathrm{d}\tau \left[\frac{1}{2}\dot{x}(\tau)^2 + V(x(\tau))\right]}}{\displaystyle\int_{x(0)=0}^{x(t)=0} \mathcal{D}x(\tau)\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\int_0^t \mathrm{d}\tau\, \dot{x}(\tau)^2}}\,, \tag{1}$$

où $V(x)$ est le potentiel défini à la question 2. En particulier, quelle contrainte sur les trajectoires de la somme le terme potentiel $\int \mathrm{d}\tau\, V(x)$ impose-t-il ?

4/ Relier les intégrales de chemin à des propagateurs, puis $\mathrm{Proba}[x(\tau) < M]$ à ces mêmes propagateurs.

5/ Déduire l'expression de la distribution $Q_t(M)$ du maximum. Tracer soigneusement cette distribution.

2 Correction de localisation faible d'un cylindre métallique

Nous étudions une correction quantique à la conductivité d'un métal appelée *correction de localisation faible*. Cette contribution trouve son origine dans les interférences quantiques entre trajectoires électroniques diffusives renversées et se manifeste aux basses températures (typiquement $T \lesssim 1\,\mathrm{K}$). Une géométrie adaptée à l'étude des phénomènes d'interférence est celle d'un anneau ou d'un cylindre. Nous analysons cette dernière situation (figure 2), qui avait été étudiée expérimentalement dans une célèbre expérience par Sharvin & Sharvin en 1981.

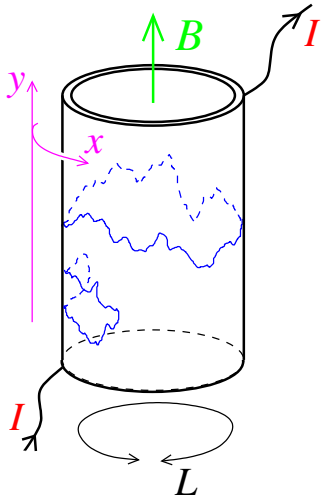


FIGURE 2 – *La situation considérée dans l'expérience de Sharvin & Sharvin : la dépendance en champ magnétique de la conductivité électrique est mesurée dans un cylindre métallique de dimension micrométrique.*

1/ Formule de Poisson.– Soit $f(x)$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et $\hat{f}(k) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\, f(x)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}$ sa transformée de Fourier. On rappelle la formule de Poisson :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(2\pi n)\,. \tag{2}$$

Écrire explicitement la formule de Poisson pour la fonction $f(x) = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\alpha x - \beta x^2}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}^+$.

2/ Spectre de l'Hamiltonien de Schrödinger libre dans un anneau.– Trouver le spectre des valeurs propres de $H = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$ dans un anneau de périmètre L, *i.e.* agissant sur les fonctions définies sur l'intervalle $[0, L]$ avec conditions aux limites périodiques $\psi(0) = \psi(L)$ et $\psi'(0) = \psi'(L)$ (rq. : il est important de normaliser les états pour la suite).

3/ Propagateur libre dans l'anneau.– Déduire que le propagateur est donné par

$$P(x,t|x',0) \stackrel{\text{def}}{=} \langle\, x\,|\mathrm{e}^{-tH}|\,x'\,\rangle = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-x'-nL)^2}{4t}}\,. \tag{3}$$

Interpréter ce résultat (on discutera en particulier sa relation avec le propagateur décrivant la diffusion libre sur $\mathbb{R}$).

4/ Enroulements dans l'anneau.– Nous considérons maintenant la situation où l'anneau est traversé par un flux magnétique ϕ.

a. Justifier que le potentiel vecteur dans l'anneau peut être pris constant, égal à $A(x) = \phi/L$.

b. Soit $(x(\tau),\ \tau \in [0,t] \mid x(0) = x(t))$ un chemin brownien fermé dans l'anneau. Quel est le sens de la fonctionnelle $\mathcal{N}[x] = \frac{1}{L}\int_0^t \mathrm{d}\tau\, \dot{x}(\tau)$?

c. On introduit l'intégrale de chemin

$$C_\phi(x,t|x',0) = \int_{x(0)=x'}^{x(t)=x} \mathcal{D}x(\tau)\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\int_0^t \mathrm{d}\tau\, \dot{x}^2 + \mathrm{i}\int_0^t \mathrm{d}\tau\, \dot{x}\, A(x)}\,, \tag{4}$$

portant sur les chemins dans l'anneau. Nous considérons la transformation de Fourier de cette intégrale $\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\phi}{2\pi}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\phi}\, C_\phi(x,t|x,0)$. Si nous permutons l'intégrale $\int \mathrm{d}\phi$ et l'intégrale de chemin $\int \mathcal{D}x$, quelle contrainte cela impose-t-il sur les trajectoires $x(\tau)$ de l'intégrale de chemin ?

d. Déduire (sans le démontrer) que

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\phi}{2\pi}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\phi}\, C_\phi(x,t|x,0) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\, \mathrm{e}^{-\frac{(nL)^2}{4t}}\,. \tag{5}$$

5/ Cylindre.– Nous considérons la même intégrale de chemin, mais dans un cylindre ($\vec{r} \equiv (x,y)$ avec $x \in [0,L]$ et $y \in \mathbb{R}$; *cf.* figure 2)

$$C_\phi(\vec{r},t|\vec{r}',0) = \int_{\vec{r}(0)=\vec{r}'}^{\vec{r}(t)=\vec{r}} \mathcal{D}\vec{r}(\tau)\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\int_0^t \mathrm{d}\tau\, \dot{\vec{r}}^2 + \mathrm{i}\int_0^t \mathrm{d}\tau\, \dot{x}\, A(x)}\,, \tag{6}$$

portant sur tous les chemins dans le cylindre (deux exemples de chemins sont représentés sur la figure 2). Déduire de la question précédente que

$$C_\phi(\vec{r},t|\vec{r},0) = \frac{1}{4\pi t} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{-\frac{(nL)^2}{4t} + \mathrm{i}n\phi}\,. \tag{7}$$

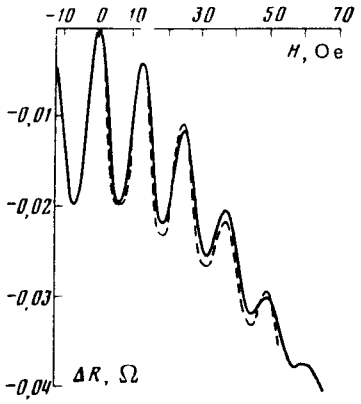


FIGURE 3 – *Correction de localisation faible à la résistance* $\Delta R(H)/R = -\Delta\sigma(\Phi)/\sigma$ *en fonction du chanp magnétique* H *(*$1\,\mathrm{Oersted} = 1\,\mathrm{Gauss} = 10^{-4}\,\mathrm{T}$*). Le système est constitué d'un mince film métallique de Lithium déposé sur un filament de quartz, de façon à former un cylindre. La mesure est effectuée à* $T \simeq 1.2\,\mathrm{K}$ *avec un courant de* $I = 40\,\mu\mathrm{A}$*. La résistance est* $R \simeq 2\,\mathrm{k}\Omega$*. Tiré de* B. L. Al'tshuler, A. G. Aronov, B. Z. Spivak, D. Yu. Sharvin, and Yu. V. Sharvin, *Observation of the Aaronov-Bohm Effect in hollow metal cylinders*, JETP Lett. **35**(11), 588 (1982).

6/ Oscillations Al'tshuler-Aronov-Spivak.– La quantité $C_\phi(\vec{r},t|\vec{r},0)$ porte le nom de *Cooperon.* Elle mesure la contribution à la conductivité des interférences des trajectoires électroniques renversées pour une échelle de temps t. La correction de localisation faible est reliée au Cooperon

$$\Delta\sigma(\phi) = -\frac{e^2}{\pi\hbar}\int_0^\infty \mathrm{d}t\, C_\phi(\vec{r},t|\vec{r},0)\, \left(\mathrm{e}^{-t/\tau_\varphi} - \mathrm{e}^{-t/\tau_e}\right)\,, \tag{8}$$

où le rôle de la première exponentielle est d'éliminer les contributions des échelles plus grandes que la *longueur de cohérence de phase* $L_\varphi = \sqrt{\tau_\varphi}$ en deçà de laquelle les interférences quantiques peuvent se manifester. La seconde exponentielle élimine les contributions des échelles plus petites que le libre parcours moyen élastique $\ell_e = \sqrt{\tau_e}$, sous laquelle le mouvement n'est plus diffusif mais balistique.

a. Montrer que la correction de localisation faible peut se mettre sous la forme d'un développement en harmoniques :

$$\Delta\sigma(\phi) = -\frac{e^2}{2\pi^2\hbar}\left(a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\phi)\right) \tag{9}$$

et calculer les coefficients a_n comme des fonctions de L/L_φ et L/ℓ_e.

b. Si nous restaurons $\hbar$ et e (la charge de l'électron) le flux adimensionné que nous avons introduit doit être remplacé par $\phi = 4\pi\Phi/\phi_0$, où Φ est le flux magnétique traversant le cylindre et $\phi_0 = h/e$ le quantum de flux. Le résultat expérimental de Sharvin & Sharvin est reproduit sur la figure. Commenter cette dernière et déduire le perimètre du cylindre ayant permis la mise en évidence du phénomène (en μm). [1]

Annexe :

• On donne la représentation intégrale de la fonction de MacDonald d'indice $\nu = 0$ (fonction de Bessel de troisième espèce modifiée)

$$K_0(z) = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{t}\,\mathrm{e}^{-t-z^2/4t} \tag{10}$$

et ses comportements limites

$$K_0(z) \underset{z\to\infty}{\simeq} \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\,\mathrm{e}^{-z} \tag{11}$$

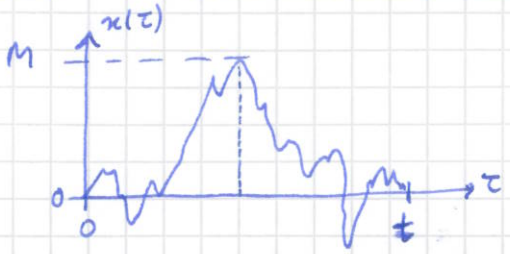
$$\underset{z\to 0}{\simeq} \ln(2/z) - \mathrm{C} \tag{12}$$

où $\mathrm{C} \simeq 0.577$ est la constante d'Euler.

• On rappelle que $\hbar = 10^{-34}$ J.s et $e = 1.6\ 10^{-19}$ C.

1. Ce phénomène a été prédit en 1981 par Al'tshuler, Aronov & Spivak avant d'être mis en évidence expérimentalement par Sharvin & Sharvin la même année.

Distribution du maximum d'un pont brownien

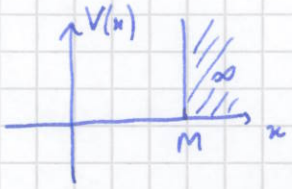


1/ $H_0 = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}$ sur $\mathbb{R}$

spectre : $\begin{cases} \psi_k(x) = \dfrac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}} & \int \psi_k^* \psi_{k'} = \delta(k-k') \\ E_k = \dfrac{k^2}{2} \quad ; \quad k \in \mathbb{R} \end{cases}$

$$P_0(x,t|x',0) = \langle x | e^{-tH_0} | x' \rangle$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dk \; \psi_k(x) \psi_k^*(x') \, e^{-E_k t}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(x-x')^2}{2t}}$$

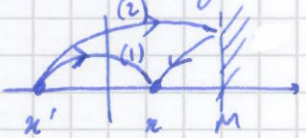
2/



Spectre de $H_1 = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$: $\begin{cases} \psi_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin k(x-M) \\ E_k = \frac{k^2}{2} \quad ; \quad k \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$

$\rightarrow P_1(x,t|x',0) = \dots$

ou méthode des images



(1) : $x - x'$

(2) : $M - x + M - x' = 2M - (x+x')$

$$P_1(x,t|x',0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \left[e^{-\frac{(x-x')^2}{2t}} - e^{-\frac{(2M-x-x')^2}{2t}} \right]$$

3/ $e^{-\int_0^t d\tau \, V(x(\tau))}$

$= 0$ si $x(\tau) > M$ pour un τ

$= 1$ si $x(\tau) < M \; \forall \tau$

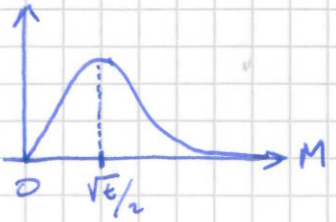
$\downarrow$

$$\equiv \prod_{\tau=0}^{t} \theta(M - x(\tau))$$

$$\text{Proba}[x(\tau) < M] = \frac{\#\text{ de ponts } < M}{\#\text{ total de ponts}} = \frac{\int_{x(0)=0}^{x(t)=0} \mathcal{D}x \; e^{-\frac{1}{2}\int_0^t \dot{x}^2} \prod_{\tau=0}^{t} \theta(M - x(\tau))}{\int_{x(0)=0}^{x(t)=0} \mathcal{D}x \; e^{-\frac{1}{2}\int_0^t \dot{x}^2}}$$

4/ $\boxed{\text{Proba}[x(\tau) < M] = \frac{P_1(0,t|0,0)}{P_0(0,t|0,0)}} \Rightarrow \boxed{\text{Proba}[x(\tau) < M] = 1 - e^{-\frac{2M^2}{t}}}$

5/ $Q_t(M) = -\frac{\partial}{\partial M} \text{Proba}[x(\tau) < M] = \frac{4M}{t} e^{-\frac{2M^2}{t}}$



/1

Enroulement dans un cylindre - Correction de localisation faible

1/ Formule de Poisson $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(2\pi n)$ où $\hat{f}(k) = \int_{\mathbb{R}} dx\, f(x) e^{-ikx}$

Application : $f(x) = e^{2i\pi\alpha x - \beta x^2}$

$$\Rightarrow \hat{f}(k) = \sqrt{\frac{\pi}{\beta}}\, e^{-\frac{(k-2\pi\alpha)^2}{4\beta}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{2i\pi n\alpha - \beta n^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\frac{\pi^2}{\beta}(n-\alpha)^2}}$$

2/ Schrödinger dans un anneau : $-\frac{d^2}{dx^2}\psi = E\psi$ sur $[0,L]$ avec $\begin{cases}\psi(0) = \psi(L)\\ \psi'(0) = \psi'(L)\end{cases}$

solution : $\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{2i\pi n x/L}$

$\begin{cases} E_n = \left(\frac{2\pi n}{L}\right)^2 \end{cases}$ $n\in\mathbb{Z}$

3/ Propagateur :

$$P(x,t|x',0) = \langle x|e^{-tH}|x'\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \psi_n(x)\,\psi_n^*(x')\, e^{-E_n t}$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{L} e^{2i\pi n\frac{x-x'}{L} - \left(\frac{2\pi n}{L}\right)^2 t}$$

$$\downarrow \quad \alpha = \frac{x-x'}{L} \ \&\ \beta = \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 t$$

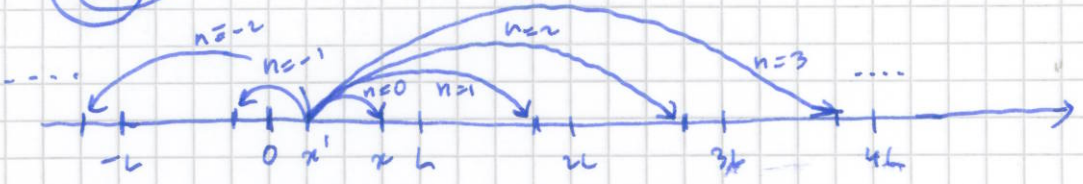
$$= \frac{1}{L} \times \sqrt{\frac{\pi L^2}{4\pi^2 t}} \sum_n e^{-\frac{L^2}{4t}\left(n - \frac{x-x'}{L}\right)^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{P(x,t|x',0) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\frac{(x-x'-nL)^2}{4t}}}$$

$\downarrow$ somme sur les enroulements

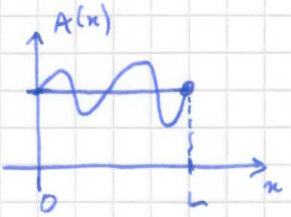
etc. $\hookleftarrow$ on déplie l'anneau



$\Rightarrow$ il faut "périodiser" le propagateur libre.

4/ Enroulements.

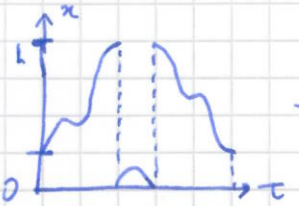
a. $\int_0^L dx\, A(x) = \Phi$



on peut choisir toute fonction ayant cette propriété.
la plus simple : $A(x) = \frac{\Phi}{L}$

b. $x(\tau)$ un chemin fermé : $x(t) = x(0)$

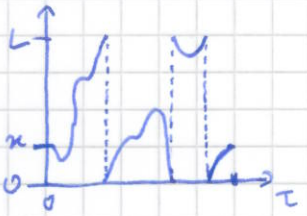
$$\mathcal{N}[x] = \frac{1}{L}\int_0^t d\tau\, \dot{x}(\tau)$$



$\Rightarrow \mathcal{N} = 0$

$x \in [0, L]$

$\Rightarrow \underbrace{x(\tau)}_{\text{dans l'anneau}} = \underbrace{\tilde{x}(\tau)}_{\text{sur } \mathbb{R}} \bmod L$



$\mathcal{N} = 1$

$\mathcal{N}[x]$ = # d'enroulement autour de l'anneau.

c. $$C_\Phi(x,t|x',0) = \int_{x(0)=x'}^{x(t)=x} \mathcal{D}x\; e^{-\frac{1}{4}\int_0^t \dot{x}^2 + i\int_0^t d\tau\, \underbrace{A(x)}_{\Phi/L}\,\dot{x}}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} C_\Phi(x,t|x,0) e^{-in\phi} = \int_{x(0)=x}^{x(t)=x} \mathcal{D}x\; e^{-\frac{1}{4}\int_0^t \dot{x}^2} \underbrace{\int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} e^{-in\phi + i\mathcal{N}[x]}}_{\delta_{n,\mathcal{N}[x]}}$$

$$= \int_{x(0)=x}^{x(t)=x} \mathcal{D}x\; e^{-\frac{1}{4}\int_0^t d\tau\, \dot{x}^2}\, \underbrace{\delta_{n,\mathcal{N}[x]}}_{\text{sélectionne les trajectoires d'enroulement } = n}$$

d. On a vu au 3/ que la contribution au propagateur libre dans l'anneau des trajectoires d'enroulement n est

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\, e^{-\frac{(x-x'-nL)^2}{4t}}$$

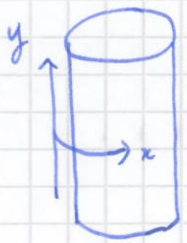
$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} C_\Phi(x,t|x,0)\, e^{-in\phi} = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\, e^{-\frac{(nL)^2}{4t}}$$

↓ Fourier inverse

$$C_\Phi(x,t|x,0) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\frac{(nL)^2}{4t} + in\phi}$$

interprétation : si on compare à $P(x,t|x',0)$, on doit ajouter à la contribution des trajectoires d'enroulement n la phase magnétique $\exp i\int_0^t d\tau\, \dot{x}\, A(x) = e^{in\phi}$

5/ Cylindre



pb séparable :

$$H = (p_x - A)^2 + p_y^2$$

$$\Downarrow$$

$C_\phi(\vec{r},t|\vec{r},0)$ = Propagateur 1d x Propagateur dans l'anneau

$$\boxed{C_\phi(\vec{r},t|\vec{r},0) = \frac{1}{4\pi t}\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\frac{(nL)^2}{4t} + in\phi}}$$

6/ Correction de localisation faible :

$$\Delta\sigma(\phi) = -\frac{e^2}{\pi\hbar}\int_0^\infty dt\; C_\phi(\vec{r},t|\vec{r},0)\left(\underbrace{e^{-t/\tau_\varphi}}_{\text{coupe les } t\gtrsim\tau_\varphi} - \underbrace{e^{-t/\tau_e}}_{\text{coupe les } t\lesssim\tau_e}\right)$$

harmoniques :

$$\Delta\sigma(\phi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \Delta\sigma_n e^{in\phi}$$

$$\Delta\sigma_n = -\frac{e^2}{\pi\hbar}\int_0^\infty \frac{dt}{4\pi t} e^{-\frac{(nL)^2}{4t}}\left(e^{-t/\tau_\varphi} - e^{-t/\tau_e}\right)$$

$$= -\frac{e^2}{2\pi^2\hbar}\int_0^\infty \frac{dt}{2t}\left(e^{-\frac{(nL/L_\varphi)^2}{4t}} - e^{-\frac{(nL/l_e)^2}{4t}}\right)e^{-t}$$

$$\boxed{\Delta\sigma_n = -\frac{e^2}{2\pi^2\hbar}\left[K_0\left(\frac{nL}{L_\varphi}\right) - K_0\left(\frac{nL}{l_e}\right)\right]}$$

rq : le cas $n=0$ demande un peu plus de soin.

$$\int_0^\infty \frac{dt}{2t}\left(e^{-t/\tau_\varphi} - e^{-t/\tau_e}\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^\infty \frac{dt}{2t}\left(e^{-t/\tau_\varphi} - e^{-t/\tau_e}\right)e^{-\frac{\varepsilon^2}{4t}}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[K_0\left(\frac{\varepsilon}{L_\varphi}\right) - K_0\left(\frac{\varepsilon}{l_e}\right)\right] = \ln\frac{L_\varphi}{l_e}$$

$$\boxed{\Delta\sigma(\phi) = -\frac{e^2}{\pi\hbar}\left(\ln\left(\frac{L_\varphi}{l_e}\right) + 2\sum_{n=1}^\infty\left[K_0\left(\frac{nL}{L_\varphi}\right) - K_0\left(\frac{nL}{l_e}\right)\right]\cos n\phi\right)}$$

en pratique on peut oublier ce terme car $L \gg l_e \sim$ qq 10 nm

$\boxed{\phi \to 4\pi\Phi/\Phi_0}$

application : expérience de Sharvin & Sharvin (1981)

Période des oscillations : $\Delta B \simeq 12$ Gauss (figure)

$$\Rightarrow \pi r^2 \times 12\text{ Gauss} = \frac{\Phi_0}{2} = \frac{\pi\hbar}{e} \Rightarrow r = \left(\underbrace{\frac{10^{-34}}{1{,}6\times10^{-19}\times12\times10^{-4}}}_{\simeq\frac{1}{2}10^{-34+18+4}}\right)^{1/2} \simeq \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mu m \simeq 0{,}7\,\mu m$$