17 septembre 2013

Chapitre n° 2 : Statique

Rappel : La mécanique : science du mouvement

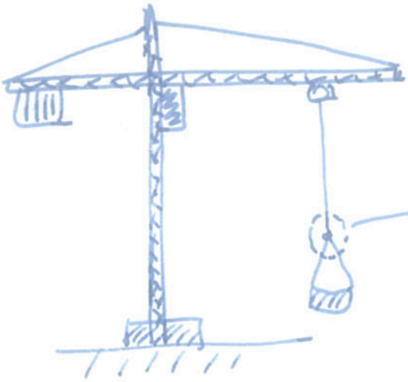
comprendre les causes et prédire son évolution

I. Introduction

De quoi parle-t-on ?

Qu'est-ce que la statique ?

→ étude des solides à l'équilibre



Les sous parties du solide sont soumises à des forces qui s'équilibrent.

Forces

grandeur dérivée.

$[Force] = M \cdot L \cdot T^{-2}$ (en utilisant $m\vec{a} = \vec{F}$)

unité du S.I. : le Newton

$1N = 1 kg \cdot m \cdot s^{-2}$

une force est une grandeur de nature vectorielle

caractérisée par
- * son module
- * une direction
- * un sens

II. Parenthèse mathématique : vecteurs

quelques propriétés élémentaires ...

1. Définition

un vecteur $\vec{V}$ est caractérisé par 1) ~~son module~~ sa norme, notée $\|\vec{V}\|$

2) une direction (la droite qui le porte)

3) un sens

notation : $\vec{V}$ ou $\vec{AB}$ pour désigner le vecteur allant du point A au point B :

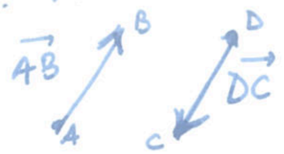
2. Égalité entre vecteurs.

même norme, même direction, même sens.

$\vec{u} = \vec{v}$:

$\vec{AB} = \vec{CD}$

vecteurs opposés : m̂ norme, m̂ direction, sens opposés



$\vec{AB} = -\vec{DC}$

3. Colinéarité

deux vect. ayant m̂ direction → sont colinéaires

ex :

4. Multiplication par un nb réel

$\vec{u} = a\,\vec{v}$

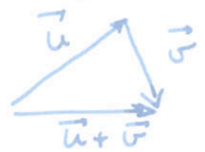
$\Downarrow$

$\|\vec{u}\| = |a| \cdot \|\vec{v}\|$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

5. Addition des vecteurs

soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ $\Rightarrow$ on peut former $\vec{u} + \vec{v}$

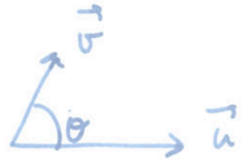


Remarque : un angle est une quantité algébrique (i.e. orientée)

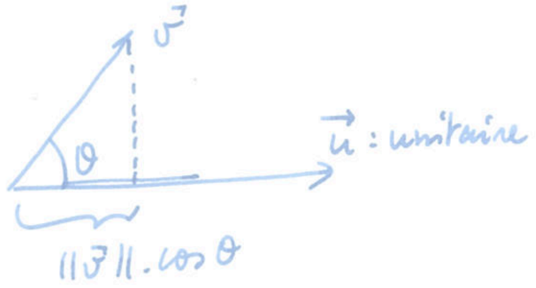
6. Produit scalaire

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u} = \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot\cos(\theta) \quad \text{où } \theta = \widehat{(\vec{u},\vec{v})}$$

angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$



Rq : si $\vec{u}$ est unitaire, i.e. $\|\vec{u}\| = 1$, alors on forme la projection de $\vec{v}$ sur la direction $\vec{u}$



7. Norme.

$$\boxed{\|\vec{v}\|^2 = \vec{v}\cdot\vec{v}} = \vec{v}^{\,2} \quad (\text{évidemment !})$$

8. Orthogonalité

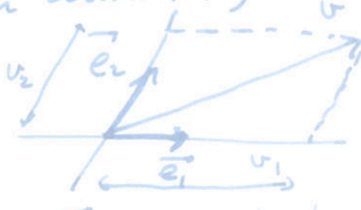
$$\vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \quad \text{pratique.}$$

9. Base - Composantes

on peut décomposer un vecteur dans une base

$(\vec{e_1}, \vec{e_2})$: base du plan (2 vecteurs non colinéaires)

$$\vec{v} = v_1 . \vec{e_1} + v_2\, \vec{e_2}$$

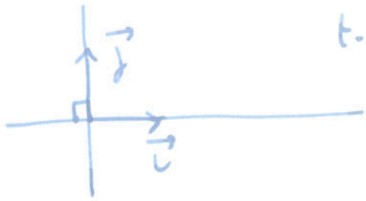


composantes du vecteur $\vec{v}$ dans la base $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$

Une fois fixé un repère, on peut ~~caractériser~~ spécifier un vecteur par ses coordonnées ou composantes

10. Base orthonormée

Il est plus facile (en général) de se placer dans une base orthonormée.



t.q. $\begin{cases} \|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1 \\ \vec{i} \cdot \vec{j} = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\vec{i} \text{ et } \vec{j} \text{ sont sans dimensions}}$

a. composantes :

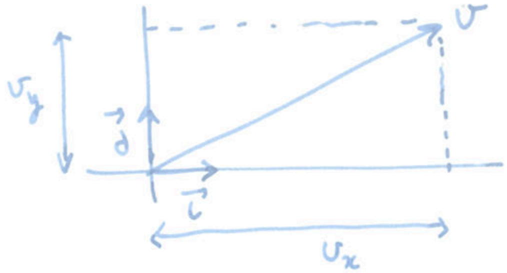
$$\underline{\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j}}$$

Pourquoi est-ce plus pratique ?
→ plus facile pour obtenir la composante !

$$\underline{v_x = \vec{i} \cdot \vec{v}}$$

dem: $\vec{i} \cdot \vec{v} = \vec{i} \cdot (v_x \vec{i} + v_y \vec{j})$
$= v_x \underbrace{\vec{i}^{\,2}}_{1} + v_y \underbrace{\vec{i} \cdot \vec{j}}_{0}$

QED.



Si on veut on peut écrire (dans le repère orthonormé)

$$\vec{v} = (\vec{v} \cdot \vec{i})\, \vec{i} + (\vec{v} \cdot \vec{j})\, \vec{j}$$

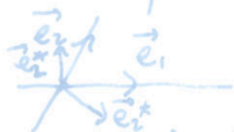
b. produit scalaire et norme

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x v_x + u_y v_y$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

Pour comprendre l'intérêt des bases orthonormées

Exercice: Quelle est la généralisation de cette représentation dans un repère non orthogonal ?



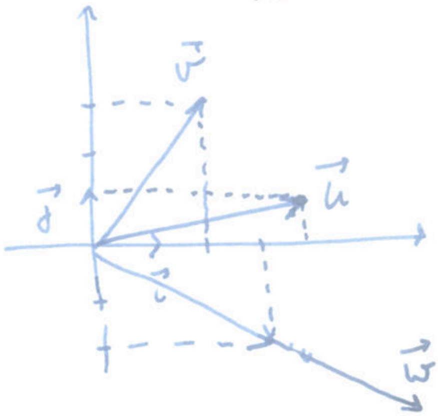
Comment trouver les composantes de $\vec{v}$?

Rép: ~~on~~ introduit deux vecteurs duaux $\vec{e}_1^{\,*}$ et $\vec{e}_2^{\,*}$ définis par $\vec{e}_1^{\,*} \cdot \vec{e}_2 = 0$ et $\vec{e}_1^{\,*} \cdot \vec{e}_1 = 1$
$\vec{e}_2^{\,*} \cdot \vec{e}_1 = 0$ et $\vec{e}_2^{\,*} \cdot \vec{e}_2 = 1$

$$\Rightarrow \quad \vec{v} = (\vec{e}_1^{\,*} \cdot \vec{v})\, \vec{e}_1 + (\vec{e}_2^{\,*} \cdot \vec{v})\, \vec{e}_2$$

La donnée des composantes permet de tout calculer...

Exemple.



$\vec u = 4\vec i + \vec j$

$\vec v = 2\vec i + 3\vec j$

$\vec w = +6\vec i - 4\vec j$

$\|\vec u\| = \sqrt{4^2+1} = \sqrt{17}$

$\|\vec v\| = \|\frac{\vec w}{2}\| = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13}$

$\theta = (\widehat{\vec u, \vec v})$?

$\cos\theta = \dfrac{\vec u \cdot \vec v}{\|\vec u\| \cdot \|\vec v\|} = \dfrac{8+3}{\sqrt{17}\times\sqrt{13}} = \dfrac{11}{\sqrt{221}} \simeq 0.7399$

$\theta \simeq 0.7378 \text{ rad} \simeq 42{,}3°$

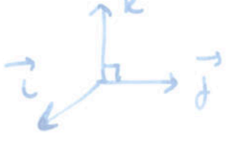
$\vec v \cdot \vec w = 0 \Rightarrow (\widehat{\vec v, \vec w}) = -\pi/2$

$\vec u + \vec v = 6\vec i + 4\vec j$

Généralisation à l'espace tridimensionnel

$\vec v$ vecteur de $\mathbb{R}^3$

base orthonormée $\underbrace{(\vec i, \vec j, \vec k)}_{\text{trièdre direct}}$



$\vec v = v_x \vec i + v_y \vec j + v_z \vec k$

III. Quelques exemples de forces

force : "action" d'un solide sur un autre par l'intermédiaire d'un certain type d'interaction.

→ ∃ plusieurs interactions élémentaires.

- gravitation → classique
- électromagnétique → classique et quantique (échelles)
- forte
- faible

} → agissent à l'échelle subatomique (portées très courtes)

⇓

mécanique quantique

A. Force de gravitation

Newton (XVII^e) : 1ère théorie de la gravitation (universelle)

unification de deux phénomènes :
- chute des corps
- attraction des planètes

→ très important ! : gravitation à la surf. de la Terre
: organisation de l'univers

1. Force de gravitation

$\vec F$: force exercée sur la masse m par la masse M

$$\boxed{\vec F = - G \frac{M m}{r^2} \vec{u_r}}$$

où $\vec{u_r} = \frac{\vec r}{\|\vec r\|}$ vect unitaire

attractive

cste gravitationnelle

les masses sont des "charges gravitationnelles"

où $\boxed{G \simeq 6{,}67 \times 10^{-11} \ m^3 \, kg^{-1} \, s^{-2}}$

2. Remarque : masse grave (pesante) / masse inertielle.

La masse apparaît à deux endroits :

PFD : $m_I \vec{a} = \underbrace{\vec{F}}_{\forall \text{ sa nature}}$

masse inertielle : "réponse de la particule à une force"

Gravitation $\vec{F} = -G \dfrac{M m_G}{r^2} \vec{u_r}$ "charge gravitationnelle" → masse grave ou masse pesante

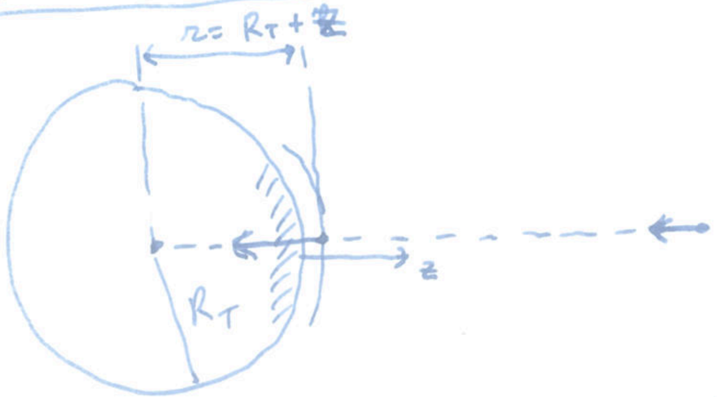
principe d'équivalence (faible) : $\boxed{m_I = m_G} \equiv m$

expérience : Dans le vide : plomb

une plume et un plomb arrivent en m temps au sol

C'est cette remarque qui a conduit Einstein à "géométriser" la gravitation pour construire la théorie de la relativité générale.

3. Gravitation à la surface de la ~~Haute~~ terre



$M_T \approx 6 \times 10^{24}$ kg

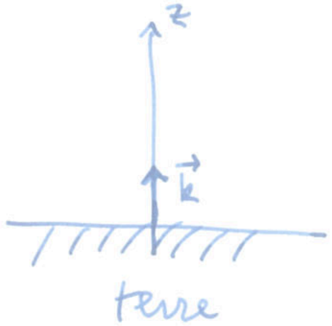
$R_T \approx 6400$ km mais $z \sim 99$ km (Everest ≈ 8 km, avions ≈ 11 km)

à l'altitude $z \ll R_T$: $\vec{F} = -\dfrac{G M_T m}{(R_T+z)^2} \vec{u_r} \underset{R_T \gg z}{\simeq} \underbrace{-\dfrac{GM}{R_T^2} \vec{u_r}}_{\vec{g}} \cdot m$

"champ" de gravitation à la surface :

$$\boxed{\vec{g} \overset{\text{def}}{=} -\frac{GM}{R_T^2} \vec{u_r}}$$

$\|\vec{g}\| \simeq 9{,}81$ m/s²   Varie un peu car la sphère n'est pas parfaitement sphérique.



$\|\vec{k}\| = 1$

$$\vec{F} = m\vec{g} \quad : \text{le poids}$$

Exercice : champ de gravitation lunaire.

$$M_{lune} = 7,35 \times 10^{22}\,\text{kg} = 0.0123\, M_T$$

$$R_{lune} = 1740\,\text{km} = 0.273\, R_T$$

$$g_{lune} = \underbrace{g_{terre}}_{9,81} \times \underbrace{\left(\frac{R_{terre}}{R_{lune}}\right)^2}_{\left(\frac{1}{0.273}\right)^2} \times \underbrace{\frac{M_{lune}}{M_{terre}}}_{0.0123} = 1,62\ \text{m/s}^2$$

Le poids sur la lune est $\sim \frac{1}{6}$ du poids sur la terre (la masse ne change pas !)

B. Force électrostatique

la seconde interaction fondamentale.

Très importante :

- les phénomènes électriques
- la structure des atomes, des molécules, la liaison chimique (quantique)

1. Charge électrique

- Particule ⟶ caractérisé par une "charge électrique" Q

  ↕ masse grave pour la gravitation

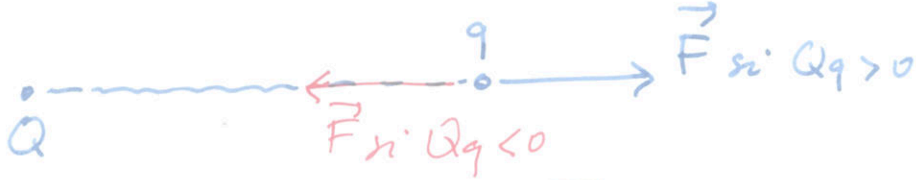
- le signe est > 0 ou < 0
- La charge est quantifiée (Thomson, 1897 puis Millikan 1910)

  Millikan ↓ mesure de q_e

Rq : quarks : charges fractionnaires
FQHE : " !

2. Force electrostatique

deux particules de charge Q et q



$$\boxed{\vec{F} = \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}} \frac{Qq}{r^2}\vec{u_r}} \quad \text{où} \quad \vec{u_r} = \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|}$$

ε_0 : "permittivité diélectrique du vide"

→ la constante de couplage électrostatique

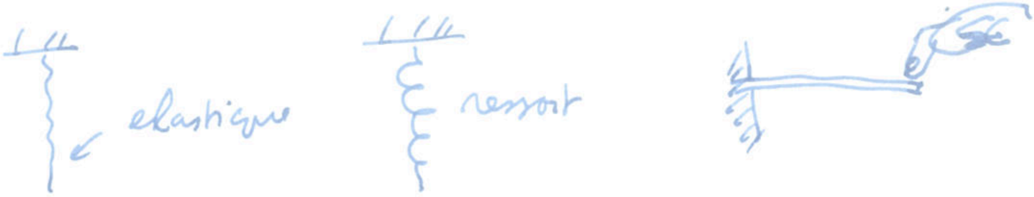
|| signe est celui de Qq qui détermine la nature attractive/ répulsive

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \simeq 9 \times 10^9 \ F^{-1} m \quad (S.I.) \qquad (F = \text{Farad})$$

C. La force de rappel élastique

→ Ça n'est pas une force fondamentale
Elle résulte des interactions moléculaires

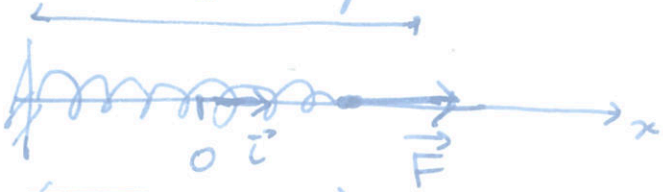
1. Elasticité



Fait expérimental : Force $\propto$ déplacement — si le déplacement est "petit" !

⇓

loi phénoménologique (par opposition à "fondamental")



On n'essaiera pas de faire un calcul microscopique pour donner k. ~~Il est plus~~ (comme la cste de couplage gravit.) Il est plus simple de le mesurer en pratique.

$$\boxed{\vec{F} = -k\,(l - l_0)\,\vec{i}}$$

loi de Hooke

↑ cste de rappel. (cste de couplage)

si on mesure le déplacement par rapport à la position d'équilibre

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F} = -k\,x\,\vec{i}} \equiv F_x\,\vec{i} \quad \text{où } F_x = -kx$$

deux cas : $x > 0 \Rightarrow F_x < 0$ (ressort étiré)

$x < 0 \Rightarrow F_x > 0$ (ressort comprimé)

D. La force de frottement dans un fluide.

encore des aspects phénoménologiques.

1. Frottement visqueux

si on déplace le solide, ~~le fluide~~ ~~frotte~~ il existe une friction entre le fluide et la surface du solide.

Expérimentalement on observe que si $\|\vec{v}\|$ est "petite" (?) on a $\|\vec{F}\| \propto \|\vec{v}\|$ (régime de Stokes)

$$\boxed{\vec{F} = -\lambda \vec{v}}$$

$-$: sens opposé

λ : coefficient de frottement visqueux

Si on s'arrête là sur le frottement :

Rq: cette force est tellement "phénoménologique" qu'elle n'est plus valable si $\|\vec{v}\|$ devient "grand"

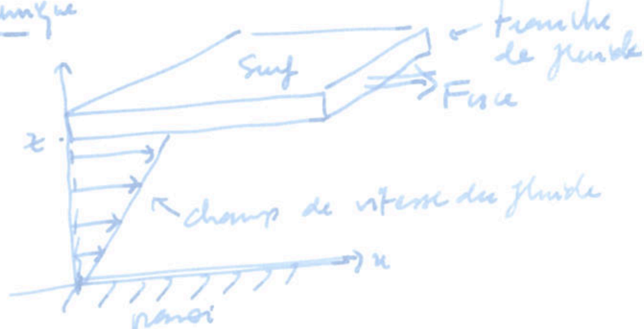
Plus sur le coefficient de friction : viscosité

l'écoulement est plus facile si le ⌀ est plus grand.

Coefficient de friction dynamique

Force de cisaillement:

écoulement d'un fluide le long d'une paroi infinie



$$\text{Force} = \mu \cdot \text{Surf} \times \frac{dv_x}{dz}$$

μ : coeff. de viscosité dynamique

$[\mu] = M L^{-1} T^{-1} = [\text{Pression}] \times T$

unité : Poise

$1 \text{ Pa.s} = 1 \text{ Po}$

Coefficient de friction cinématique :

$$\nu \overset{\text{def}}{=} \frac{\mu}{\rho_{fluide}} \qquad [\nu] = L^2 T^{-1}$$

ex:	ρ_{fluide}	μ (Pa.s)	ν ($m^2 \cdot s^{-1}$)
glycérine	1260	$800 \cdot 10^{-3}$	$635 \cdot 10^{-6}$
eau liq.	1000	10^{-3}	10^{-6}
air sec	1,2	0.018×10^{-3}	$15 \cdot 10^{-6}$

Coefficient de frottement visqueux

$$\lambda = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{nb sans} \\ \text{dimension}}}{k_1} \times \mu \times \underset{\substack{\uparrow \\ \text{dimension} \\ \text{de l'objet.}}}{a}$$

ex : déplacement d'une sphère.

$$\lambda = 6\pi \mu \cdot \underset{\text{rayon}}{r}$$

2. Frottement aux "grandes vitesses" (régime de Newton)

si $\|\vec{v}\|$ est trop grand, la force de friction, traduisant la résistance du fluide au mvt du solide, est dominée par l'effet inertiel (coût du déplacement du fluide)

pour avancer ici le solide doit déplacer cette masse de fluide.

$$\vec{F} = -k_2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{densité} \\ \text{du fluide.}}}{\rho_f} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{taille de l'objet.}}}{a^2} \|\vec{v}\| \vec{v}$$

3. Nombre de Reynolds.

Que veut dire $\|\vec{v}\|$ "petite" ou "grande"

$$\|F_{inertiel}\| = \rho_f a^2 \vec{v}^2 > \|F_{frottement\ visq.}\| = \mu a \|\vec{v}\|$$

lorsque $\|\vec{v}\| > \frac{\mu}{\rho_f a}$

on peut aussi introduire la quantité adimensionnée

$$R = \frac{2\, a \, \|\vec{v}\| \, \rho_{\text{fluide}}}{\mu} \sim \frac{\|\vec{F}_{\text{inertiel}}\|}{\|\vec{F}_{\text{visq.}}\|}$$

$\downarrow$

de Reynolds.

$R \lesssim 1$: écoulement laminaire

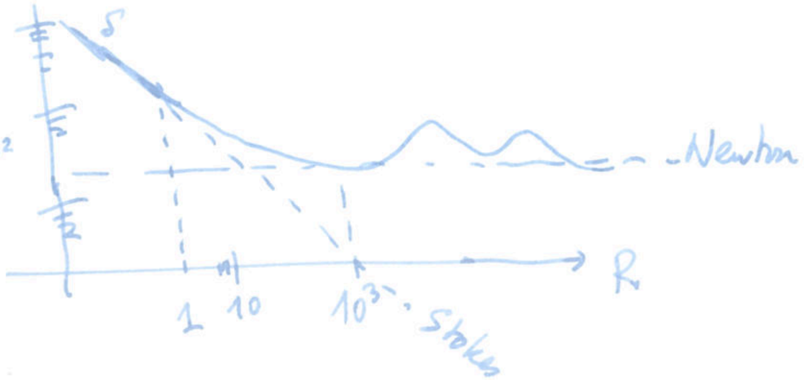
(en pratique $R \lesssim 20$)

$R \gg 1$: écoulement turbulent

Conclusion: En pratique la "vraie" force de frottement n'a pas une expression simple! Elle est de la forme

$$\|\vec{F}\| = C_x\left(\frac{a\|\vec{v}\|\rho_f}{\mu}\right) \times \rho_f \, a^2 \|\vec{v}\|^2$$

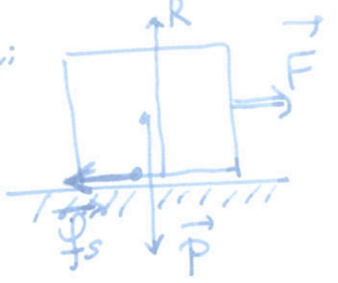
$$C_x = \frac{2\|\vec{F}\|}{\pi \rho a^2 v^2}$$



E. Frottement solide. (frottement sec)

→ description phénoménologique.

solide immobile:



On constate que si $\|\vec F\|$ est trop faible, inférieur à un certain seuil, le solide reste immobile.

$$\boxed{\text{si } \|\vec F\| < k_s \|\vec R\| \Rightarrow \vec f_s + \vec F = 0}$$

car $\vec v = 0$

ici $\|\vec R\| = mg$ — le solide reste immobile. ($\vec v = 0$)

k_s : coefficient de friction statique

$\Rightarrow \|\vec f_s\| < k_s mg$

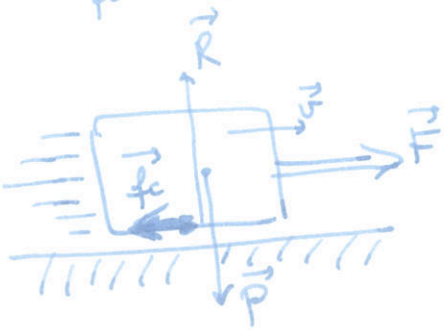
solide en mouvement :

$$\boxed{\text{si } \|\vec F\| > k_s \|\vec R\| \Rightarrow \text{le solide se met en mvt et } \|\vec f_c\| = k_c \times \|\vec R\|}$$

$\vec f_c$ est opposée au mvt.

k_c : coefficient de friction cinétique. $\boxed{k_c < k_s}$

i.e. $\|\vec f_c\| < \|\vec f_s$ au seuil$\|$



Remarque : C'est une description phénoménologique. k_s et k_c dépendent de plein de choses (nature des matériaux, états des surfaces, rugosité ...) et il doit être extrêmement difficile de les calculer par une "théorie microscopique" (à la base, à l'échelle micro, l'interaction entre les surfaces est de nature électrostatique.

Étude de l'origine microscopique du frottement : tribologie

F. Résumé et remarque

parmi les 5 forces → deux fondamentales
trois plutôt phénoménologiques

→ trois peuvent être écrite comme :

$$\vec{F} = -\frac{dV}{dr}\vec{u_r} \text{ ou } \vec{F} = -\frac{dV}{dx}\vec{i}$$

i.e. dérivent d'un potentiel.
Ce sont des forces conservatives.

	Force.	
Conservatives	Gravitation : $\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2}\vec{u_r}$	Fondamentales
	Electrostatique : $\vec{F} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r^2}\vec{u_r}$	
	Élastique : $\vec{F} = -kx\vec{i}$	Phénoménologiques (empiriques)
Non conservatives (dépendent de $\vec{v}$)	Frottement fluide : $\vec{F} = -\lambda\vec{v}$	
	Frottement solide : $\|\vec{\varphi}\| = k\|\vec{R}\|$ ou $= k_c\|\vec{R}\|$ et opposé à $\vec{v}$	

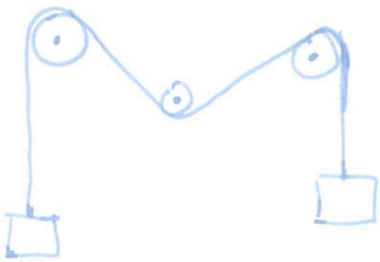
IV. Lois de la statique du point

A. Enoncé des lois

On va considérer des objets matériels.

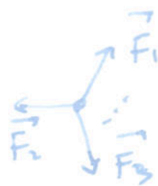
~~Pour simplifier~~ on considère l'action des forces en un point ~~ou~~ (centre de masse).

Un cas intéressant est celui où des objets sont reliés par des liaisons rigides  ou des cordes et des poulies



1ère loi : La somme des forces qui s'exercent sur chacun des points du système est nulle.

$$\underbrace{\sum_n \vec{F}_n}_{\text{toutes les forces}} = \vec{0} \quad \text{pour chaque point}$$



Rq : c'est un cas particulier du PFD

2ème loi : Loi de l'action et de la réaction.

Soient deux objets en interaction.

$\vec{F}_{1/2}$ = force de 1 sur 2

$\vec{F}_{2/1}$ = ——— 2 — 1

$\Rightarrow \vec{F}_{2/1} = -\vec{F}_{1/2}$

· ex : Deux charges se repoussent

Remarques : La 1ère loi relie des forces s'appliquant toutes au m̄ point

La 2nde loi relie des actions mutuelles entre $\left\{ \begin{array}{l} \text{points distincts} \\ \text{objets} \end{array} \right.$

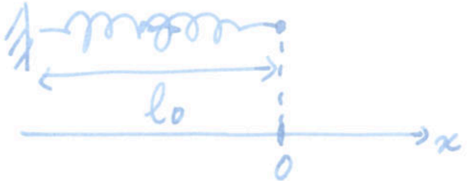
B. Méthode.

1. Identifier le(s) système(s)
2. Faire le bilan des forces en présence (sur chaque système)
3. Caractériser norme, direction et sens des forces
4. Appliquer les 2 lois qui expriment des conditions d'équilibre (seulement la 1ère)

} ça va ensemble !

C. Exemple : ressort

1. Ressort horizontal.



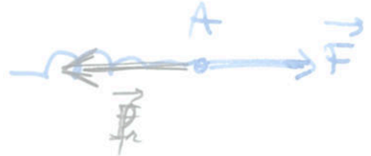
On tire sur le ressort avec une force $\vec{F}$

Q1 : quelle est la position x à l'équilibre ?
Q2 : quelle est la force exercée sur le mur ?

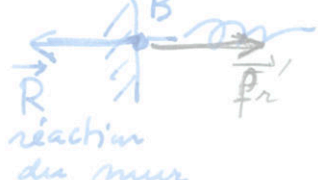
① La nature des questions conduit à considérer
i) le point A (extrémité mobile)
ii) ——— B (mur) ou le ressort dans son ensemble

② Bilan des forces.

point A :



point B :



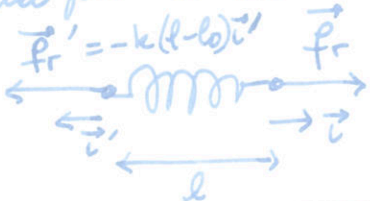
: le ressort tire sur B

③ point A : $\vec{F}$: fixée par l'extérieur (la donnée du pb)

$\vec{f_r} = -k.(l-l_0)\vec{i} = -k.x.\vec{i}$

écrivons $\vec{F} = F_x\vec{i}$ ~~→ On projette l'éq. $\vec{F} + \vec{f_r} = \vec{0}$ (loi) sur $\vec{i}$ ⇒ $F_x - kx = 0$~~

point B : $\vec{R}$: réaction du mur
$\vec{f_r}'$: force exercée par le ressort sur le mur } inutile



④ Application de la 1ère loi au point A :

$$\vec{F} + \vec{f_r} = \vec{0}$$

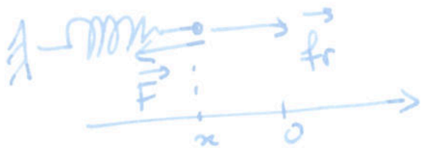
$\vec{i} \cdot (\dots)$ ↓ on projette cette équation vectorielle pour obtenir une équation algébrique

$$F_x - kx = 0$$

on obtient la position d'équilibre :

$$\boxed{x = \frac{F_x}{k}}$$

Rq : F_x et x sont des quantités algébriques ⇒ cette réponse décrit également la situation où le ressort est comprimé ($F_x < 0$)



Application de la 2nde loi :

Le ressort médie une interaction entre ses deux extrémités

$$\vec{F}_{A/B} = -\vec{F}_{B/A}$$

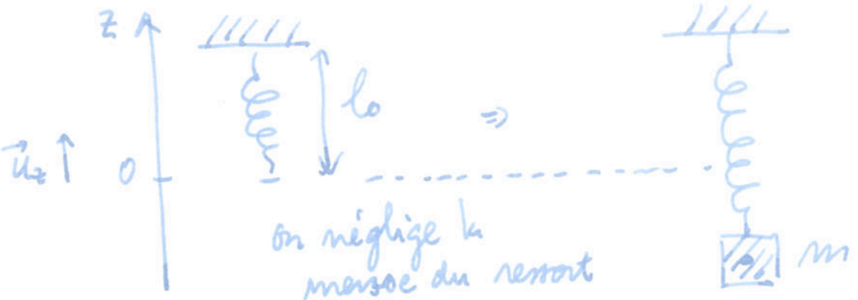
dans nos notations : $\vec{f_r}' = -\vec{f_r}$

(3bis) point B :
(4bis) 1ère loi sur le point B :

$$\vec{R} + \vec{f_r}' = \vec{0} \Rightarrow \underline{\vec{R} = -\vec{f_r}' = \vec{f_r} = -\vec{F}}$$

Remarque : Si on avait considéré le ressort comme un système ⇒ les forces f_r et f_r' seraient des forces internes ⇒ on écrirait directement $\vec{R} + \vec{F} = \vec{0}$
... agissant sur le ressort

2. Masse accrochée à un ressort vertical



Q : Quelle est la position d'équilibre ?

① Système : la masse

② & ③ Bilan des forces : Poids $\vec{P} = -mg\,\vec{u}_z$

Force de rappel $\vec{F}_r = -kz\,\vec{u}_z$

④ On applique la 1ère loi : $\vec{F}_r + \vec{P} = \vec{0}$

$\vec{u}_z$: $\downarrow$ on projette sur $\vec{u}_z$

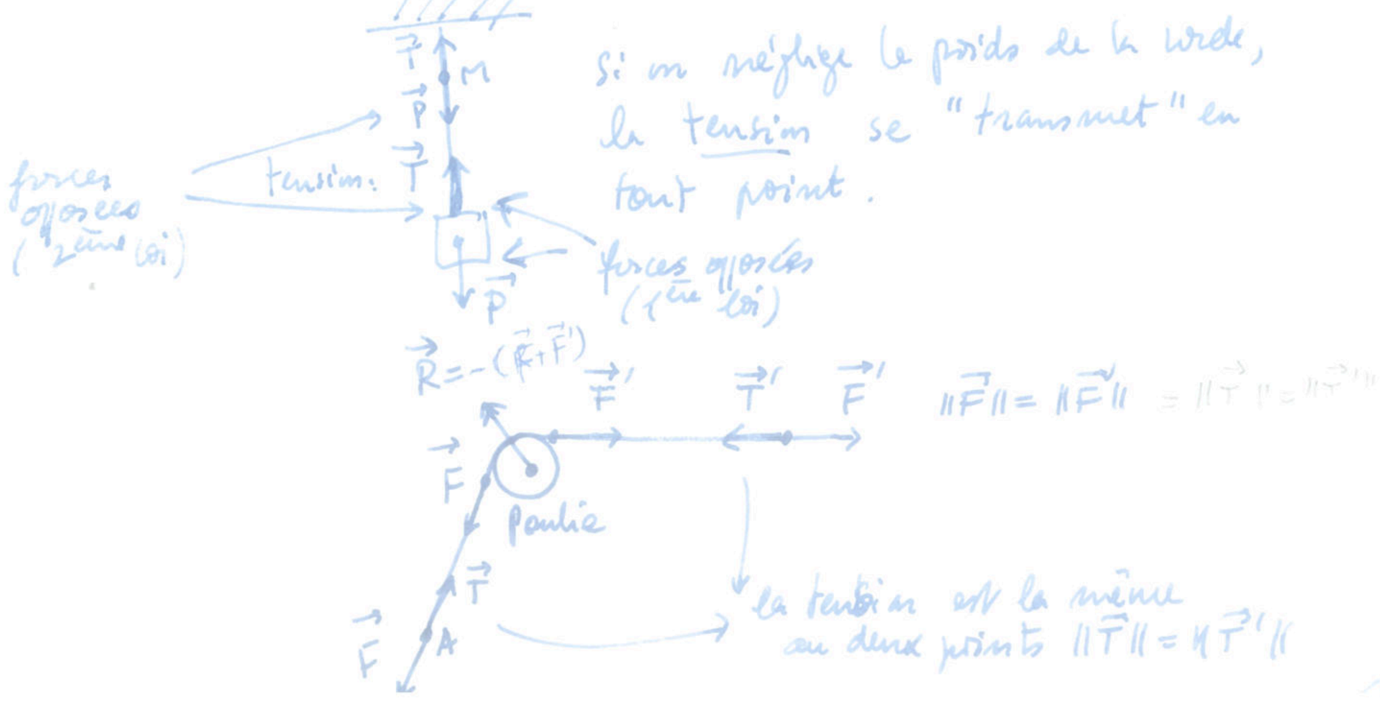
$-kz - mg = 0$

$\Rightarrow \boxed{z = -\frac{mg}{k}}$

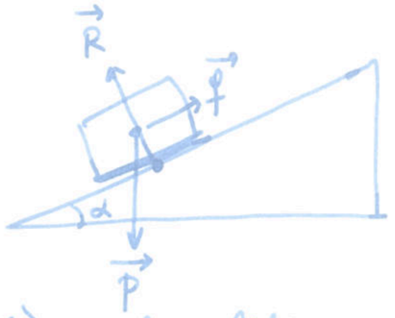
D. Transmission des forces par des cordes et des poulies.

On peut appliquer la première loi à tout point du fil

si on néglige le poids de la corde, la tension se "transmet" en tout point.



E. Exemple: Solide à l'équilibre sur un plan incliné



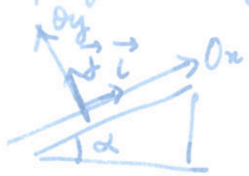
Q: jusqu'à quel angle le solide reste-t-il à l'équilibre ?

(1) Système: le solide

(2) Bilan des forces : $\vec{P}$: le poids ; $\vec{R}$: la réaction du support et $\vec{f}$: la force de frottement solide.

Hypothèse: le ~~sol~~ solide est à l'équilibre.

(3) & (4) On projette les forces dans un repère.



1ère loi : $\vec{P} + \vec{R} + \vec{f} = \vec{0}$

$\vec{i}\,\cdot$ $\qquad$ $\cdot\,\vec{j}$

$$\boxed{f_x - \underbrace{mg\sin\alpha}_{} = 0} \quad \& \quad \boxed{R_y - mg\cos\alpha = 0}$$

la force $\left(\vec{F} = \right)(\vec{P}\cdot\vec{i})\,\vec{i}$ avec laquelle la gravitation "tire" sur le solide.

$|\vec{P}\cdot\vec{i}|$

équilibre $\Rightarrow$ $\|\vec{F}\| < k_s \|\vec{R}\|$

$mg \cdot \sin\alpha < k_s\,|R_y| = k_s\, mg\cos\alpha$

$\Downarrow$

$$\boxed{\text{équilibre si } \tan\alpha < k_s}$$