1er octobre 2013

IL FAUT M'ARRÊTER SI JE VAIS TROP VITE

Chapitre 4. Dynamique

Attention : les choses vont se compliquer
⇓
il va falloir travailler énormément

Les éq. diff. servent partout !

I. Introduction

Qu'est-ce que la dynamique ?

Rappelons que la mécanique est la science du mouvement. On construit une théorie pour analyser / prédire le mouvement (la dynamique) des corps matériels.

Où en est-on ?

La mécanique est la première théorie physique fondamentale de l'histoire de l'humanité. Elle a joué (et continue à jouer) un rôle très important en physique. À ce titre il est intéressant de faire quelques remarques générales. Qu'est-ce qu'une théorie physique ? Qu'a-t-on déjà fait (dans le cours) ? Que reste-t-il à faire ?

Structure d'une théorie physique :

① Le langage, les outils, ... ← l'analyse vectorielle, la cinématique → permet de décrire ce à quoi on s'intéresse.

ce qu'il nous reste à introduire → ② Les postulats (ou axiomes) → le PFD. Le "cœur nucléaire" de la mécanique.

D'où vient le postulat fondamental ?

* de grands principes (homogénéité de l'espace-temps, invariance galiléenne, ...)

* de $\left\{\begin{array}{l}\text{la comparaison avec}\\ \text{la validation par}\end{array}\right\}$ les expériences

ex: Aristote : $\mu \vec{v} = \vec{F}$ → pb avec l'invariance galiléenne.

$\vec{v}$: vitesse, $\vec{F}$: force

→ l'origine du mouvement est la force. (l'état naturel est l'immobilité) au repos

Est-ce absurde ? Non : cela décrit un objet dans un fluide visqueux (en régime sur-amorti)

Conclusion : cela n'est pas un grand principe fondamental, mais cela n'est pas absurde. puisque c'est utile

Newton : $m \vec{a} = \vec{F}$

$\vec{a}$: accélération

→ l'origine de l'accélération (ie. la modif. de la nature du mouvement) est la force.

(l'état naturel est le mvt rectiligne uniforme)

II. Énoncé des postulats

A. 1ère loi de Newton : Principe d'inertie

traduction (du latin) de la Marquise du Chastellet (1759) :

"Tout corps persevère dans l'état de repos ou de mouvement uniforme en ligne droite dans lequel il se trouve, à moins que quelque force n'agisse sur lui et ne le contraigne à changer d'état."

Plus moderne :

> "Il existe au moins un référentiel dans lequel tout corps qui n'est soumis à aucune action ni influence de la part d'autre corps est animé d'un mouvement rectiligne uniforme (ou est au repos)."

ces référentiels sont appelés des "référentiels galiléens" ou "d'inertie"

B. Deuxième loi de Newton : Principe fondamental de la dynamique

1. Quantité de mouvement

Déf. $\vec{p} \overset{\text{def}}{=} m \vec{v}$

m : masse ; $\vec{v}$: vitesse

2. P.F.D

soit $\vec{F}$ la force totale exercée sur un corps matériel

$$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}}$$

Ex : un cas où m n'est pas cste :

une fusée qui brûle son carburant (fraction importante de sa masse)

Si la masse du corps est constante, $\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m \underbrace{\frac{d\vec{v}}{dt}}_{\substack{\vec{a} \\ \text{accélération}}}$

$$\boxed{m\vec{a} = \vec{F}}$$

C. 3ème loi de Newton : Principe d'action / réaction

> Si un corps A exerce une force $\vec{F}_{A/B}$ sur un corps B
> alors le corps B exerce la force $\vec{F}_{B/A} = -\vec{F}_{A/B}$ sur A

D. Remarques.

1. La première loi se déduit de la 2ème

si $\vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{a} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \text{cste}$

2. Les postulats sont-ils "uniques" ?

NON → il existe d'autres formulations avec le même contenu (autre langage, autres outils, mais même théorie)

- principe de moindre action (Maupertuis)
  - ↳ mécanique Lagrangienne
  - ↳ mécanique hamiltonienne.

3. Quel est le contenu du P.F.D ?

* la 2ème loi relie une grandeur cinématique, $\vec{a}$, i.e. permettant de décrire le mouvement, à une grandeur dynamique, $\vec{F}$.

* En général, $\vec{F}$ est fonction de $\vec{r}$, $\vec{v}$ et t donc le P.F.D. est une équation différentielle

$$m\,\ddot{\vec{r}}(t) = \vec{F}(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t), t) \longrightarrow \begin{cases} m\,\dot{\vec{v}} = \vec{F} \\ \dot{\vec{r}} = \vec{v} \end{cases}$$

éq. diff. (en général non linéaire) vect. du 2nd ordre ⇒ 6 éqs. diff. non linéaires couplées du 1er ordre

→ la donnée de $\vec{F}$ à l'instant t permet de calculer la variation de la vitesse

PROCÉDURE :

* t : on connaît $\vec{r}(t)$, $\vec{v}(t)$ ⇒ on calcule $\vec{F}$
* $\dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{\vec{F}}{m} \longrightarrow \vec{v}(t+\Delta t) \simeq \vec{v}(t) + \Delta t \cdot \dfrac{\vec{F}}{m}$
* $\vec{r}(t+\Delta t) \simeq \vec{r}(t) + \Delta t \cdot \vec{v}(t)$

programme d'intégration numérique du P.F.D.

Exercice : écrire un petit prg sur votre calculatrice ou votre ordinateur dans le cas 1D. Intégrer le P.F.D dans des cas simples. Faire varier les conditions initiales. Tracer le résultat.

4. Méthode

- Identification du système
- Bilan des forces s'exerçant sur le système
- et caractériser les forces (projection dans un repère cartésien)
- Application du PFD → résolution de l'équa. diff.

III. Exemple simple : Balistique

mouvement sous l'action du champ de pesanteur seul.

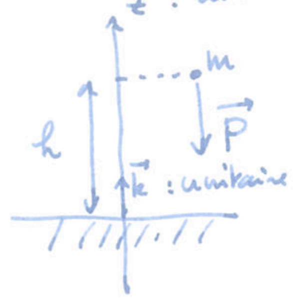
A. Chute d'un corps (à la surface de la terre)

on lâche un objet sans vitesse initiale d'une hauteur h.
On néglige tout autre force (frottement)

1. Système : point matériel de masse m

2. Bilan des forces : le poids $\vec{P} = m\vec{g}$

3. Caractérisation :



$$\vec{P} = -mg\vec{k}$$

$g = 9.81\,m/s^2$

4. Application du P.F.D.

$$m\vec{a} = \vec{P} \quad (*)$$

$$\Rightarrow \quad a_x = a_y = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} v_x(t) = v_x(0) \\ v_y(t) = v_y(0) \end{cases}$$

si $\boxed{\vec{v}(0) = \vec{0}} \Rightarrow$ le mvt reste selon l'axe Oz $\forall t$.

mvt rectiligne uniformément accéléré

on peut oublier les coordonnées x et y

$$(*) \cdot \vec{k} \longrightarrow \ddot{z}(t) = \dot{v}_z(t) = -g$$

$\downarrow$ on intègre une fois $\displaystyle\int_0^t dt'\,\dot{v}_z(t') = -g\int_0^t dt'\,1$

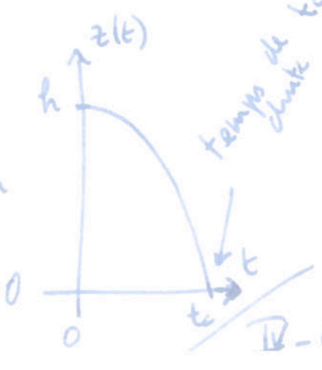
$$\dot{z}(t) = v_z(t) = -gt + v_z(0) = -gt$$

$\downarrow$ on intègre une 2^{nde} fois

$$z(t) = -g\cdot\frac{t^2}{2} + z(0)$$

$\downarrow$ on applique la c.i. $z(0) = h$

on trouve la loi horaire $\boxed{z(t) = h - \dfrac{gt^2}{2}}$



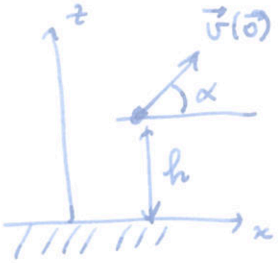
$t_c = \sqrt{\dfrac{2h}{g}}$

A.N. $h \simeq 500\,m$ $\Rightarrow$ $\underline{t_c \simeq 10\,s}$

indépendamment de m !

B. Lancer d'un projectile (version plus compliquée du A)

on reprend le pb précédent avec $\vec{v}(0)$ ~~pointant~~ dans une direction <u>non verticale</u>



$\vec{v}(0) = v_0 \left[\vec{i} \cos\alpha + \vec{k} \sin\alpha \right]$

$v_y(0) = 0 \Rightarrow$ on oublie Oy

$$m\vec{a} = m\vec{g}$$

$\downarrow$ on projette l'éq. vectorielle

termes de bord des $\int$

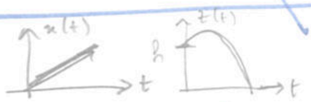
$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ (\ddot{y} = 0) \\ \ddot{z} = -g \end{cases} \xrightarrow[\text{intègre } \int_0^t]{\text{on}} \begin{cases} \dot{x}(t) = v_x(0) \\ (\dot{y}(t) = 0) \\ \dot{z}(t) = -gt + v_z(0) \end{cases}$$

$\downarrow$ on intègre $\int_0^t$

$x(0) = 0$

loi horaire : $$\boxed{\begin{cases} x(t) = v_x(0)\,.\,t \\ z(t) = h + v_z(0)\,t - g\frac{t^2}{2} \end{cases}}$$

$z(0)$

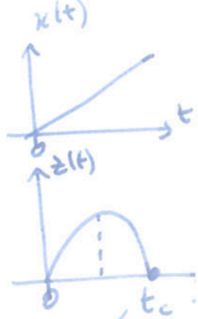


Rq: la loi horaire est une paramétrisation de la trajectoire (i.e. son écriture sous forme de courbe paramétrée)

Trajectoire lorsque $h=0$

simplifions : $h = 0$

<u>loi horaire</u>:
$$\begin{cases} x(t) = v_0 . \cos\alpha \,.\, t \\ z(t) = v_0 . \sin\alpha \,.\, t - g\frac{t^2}{2} \end{cases}$$



$t_c = \frac{2 v_0 \sin\alpha}{g}$

<u>trajectoire</u>: $z = \text{fct}(x)$

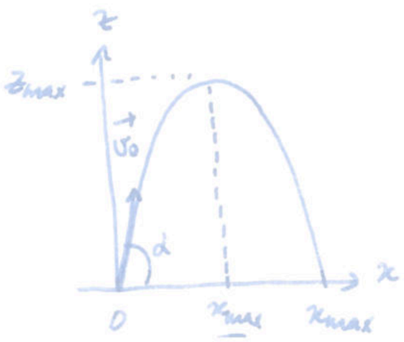
ici : facile car $x \propto t \Rightarrow z = v_0 \sin\alpha \frac{x}{v_0 \cos\alpha} - \frac{g}{2}\left(\frac{x}{v_0\cos\alpha}\right)^2$

$$\boxed{z = x \times \left(\tan\alpha - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2\alpha}\, x \right)}$$

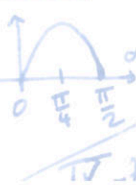
si $x = x_{max}/2$
$z_{max} = \frac{v_0^2}{2g}\sin^2\alpha$

C'est une parabole

Pour les futurs artilleurs



$$x_{max} = \frac{2 v_0^2}{g} \underbrace{\tan\alpha \cos^2\alpha}_{\cos\alpha \sin\alpha \,=\, \frac{\sin 2\alpha}{2}} \Rightarrow \boxed{x_{max} = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha}$$



à v_0 fixée, l'optimum est pour $\alpha = \pi/4$

IV. Parenthèse mathématique : Équations différentielles

A. Définition, vocabulaire

1. Def. soit $y(x)$ une fonction inconnue solution de l'équation :

$$\phi(x; y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$$

cette éq. est une éq. diff. d'ordre n

en pratique : étant donnés $y(0), \dots, y^{(n-1)}(0)$ cette éq. permet de déterminer $y^{(n)}(0)$ et ainsi de proche en proche, la fonction $y(x)$

2. Éq. du 1er ordre à variables séparables

si elle peut se mettre sous la forme :

$$\phi(x; y, y') = 0 \longrightarrow F(y)\,y' = G(x) \quad F(y)\,dy = G(x)\,dx$$

elle est dite "à variables séparables"

exemple : $y' + a(x)\,y^2 = 0$

$$\downarrow$$

$$-\frac{dy}{y^2} = a(x)\,dx \rightarrow -\int_{y(0)}^{y(x)} \frac{dy}{y^2} = \int_0^x dx'a$$

$$\downarrow$$

$$\frac{1}{y(x)} - \frac{1}{y(0)} = A(x)$$

$\downarrow$ une primitive de $a(x)$

3. Éq. diff. linéaires

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)\,y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x)\,y'(x) + a_0\,y(x) = b(x)$$

$\uparrow$ $a_n = 1$

éq. homogène :

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)\,y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)\,y' + a_0(x)\,y = 0$$

~~ex : PFD en 1D avec frottement fluide + force de rappel~~

$$\cancel{m\ddot{x}(t) + \lambda\dot{x}(t) + k\,x(t) = F_{ext}(t)}$$

4. Éq. diff. linéaires à coeff. csts

$$a_k(x) \rightarrow a_k$$

$$y^{(n)} + a_{n-1}\,y^{(n-1)} + \dots + a_1\,y' + a_0\,y = b(x)$$

$$\downarrow$$

l'éq. homogène est facile à résoudre (en principe) $\Rightarrow$ on peut se ramener à une éq. algébrique.

$\rightarrow \exists$ une procédure générale

5. Exemples.

* PFD avec une Force en $1/x^2$ (coulomb, gravitation)

sur une ligne : $m\,\ddot{x}(t) = \dfrac{k}{x(t)^2}$ ou dans $\mathbb{R}^3$ $m\,\ddot{\vec{r}}(t) = \dfrac{k}{\|\vec{r}\|^2}$

éq. diff. du 2ème ordre, non linéaire.

⇒ difficile... mais pas impossible !
(et même facile grâce aux considérations énergétiques)

* PFD avec une force de frottement + une force de rappel + une force ext.

$$m\ddot{x} + \lambda \dot{x} + k x = F_{ext}(t)$$

éq. diff. linéaire du 2ème ordre, à coeff. csts, avec 2nd membre.

⟶ "facile" (∃ une méthode générale dont le principe est simple)

B. Équation différentielle linéaire du 1er ordre à coeff. cst.

$$y'(x) + a\,y(x) = b(x)$$

1. Équation homogène $\quad y' + a y = 0$

a. méthode 1.

on utilise que l'éq. diff. est séparable.
(i.e. la méthode se généralise à des éq. diff. du 1er ordre séparables, i.e. non linéaires éventuellement)

$$\frac{dy(x)}{dx} = -a\,y(x) \Rightarrow \frac{dy}{y} = -a\,dx$$

on "intègre" l'éq. diff. $\displaystyle\int_{y(0)}^{y(x)} \frac{dy}{y} = -a\int_0^x dx'$ ← variable d'intégration (muette)

$$\left[\ln y\right]_{y(0)}^{y(x)} = -a.x \Rightarrow \ln y(x) - \ln y(0) = -ax$$

$$\Rightarrow \ln \frac{y(x)}{y(0)} = -ax \Longrightarrow \boxed{y(x) = y(0).\exp[-ax]}$$

b. méthode 2

on utilise que les coeff. de l'éq. diff. linéaire sont ctes

($\Rightarrow$ la méthode se généralise pour toutes les éq. diff. linéaires à coeff. ctes)

$$y'(x) + a\, y(x) = 0 \qquad (*)$$

autrement dit : une certaine combinaison linéaire de y et de y' est nulle $\forall x$.

$\Rightarrow$ pour se simplifier avec sa dérivée, la forme de la fct doit être invariante sous l'action de la dérivation.

$\Downarrow$

Proposons $y(x) = e^{r.x}$ une fct "test" ou un "ansatz"

on l'injecte dans $(*)$

$$r\, e^{rx} + a\, e^{rx} = 0 \quad \forall x$$

$$\underbrace{(r+a)\, e^{rx} = 0 \ \forall x}$$

$\Downarrow$

Polynôme caractéristique : $\boxed{r+a=0}$ c'est une éq. algébrique

- si $r=-a \Rightarrow$ l'ansatz e^{rx} est solution de $(*)$
- l'éq. diff. est linéaire $\Rightarrow$ la solution générale est

$$y(x) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{une cte}}}{C} . e^{-a.x}$$

: $C \in \mathbb{R} \Rightarrow$ définit une famille de solutions.

c. <u>Résumé</u>.

À RETENIR : 1^{re} éq. diff. $y'(x) + a\,y(x) = 0$
a pour solution $y(x) = C\,e^{-ax}$

(à savoir retrouver)

2. Équation avec 2^{nd} membre

a. "méthode" de la devinette (!!)

$$y'(x) + a\,y(x) = b(x) \qquad (**)$$

- soit $y_p(x)$ une sol. particulière de $(**)$
  (à deviner !)
- soit $y_{homo}(x\,;C)$ la sol. générale de l'éq. homogène
- la solution générale de $(**)$ est

$$y(x) = y_{homo}(x\,;C) + y_{part}(x)$$

<u>dém.</u> : $\cancel{y'_{homo}} + \cancel{y'_{part}} + a(\cancel{y_{homo}} + \cancel{y_{part}}) = \cancel{b}$

QED.

<u>exemple simple</u> : $b(x) \to b$

$y' + a \cdot y = b \Rightarrow$ une sol. particulière est $y = b/a$

$\Rightarrow$ la sol. générale est

$$\boxed{y(x) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{cte d'intégration}}}{C}\;\underbrace{e^{-ax}}_{y_{homo}} + \frac{b}{a}}$$

b. méthode de variation de la constante (hors programme) ⚠

éq. homo $\longrightarrow$ $y_{homo}(x) = C \cdot e^{-ax}$

Proposons une sol. de la forme $C \to C(x)$

$$y(x) = C(x)\,e^{-ax}$$

$$\Rightarrow \quad y' = -ay + c'\,e^{-ax}$$

$$y' + ay = c'\,e^{-ax}$$

$\Downarrow$ on injecte dans $(**)$

$$c'\,e^{-ax} = b(x) \quad \Rightarrow \quad c'(x) = b(x)\,e^{+ax}$$

$\Downarrow$

on intègre : $\displaystyle C(x) = \int^{x} dx'\, b(x')\, e^{ax'}$

la sol. générale est

$$y(x) = C\,e^{-ax} + e^{-ax}\int^{x} dx'\, b(x')\, e^{ax'}$$

ou plus jolie :

$$\boxed{y(x) = y(0)\,e^{-ax} + e^{-ax}\int_0^{x} dx'\, b(x')\, e^{ax'}}$$

exemple : Bille dans un fluide avec force extérieure :

$$m\,\dot{v}_x + \lambda\, v_x = F_{ext}(t)$$

$\Downarrow \quad 1/\tau \overset{\text{def}}{=} \lambda/m$

$$v_x(t) = v_x(0)\, e^{-\frac{t}{\tau}} + \int_0^{t} dt'\, \frac{F_{ext}(t')}{m}\, e^{\frac{t'-t}{\tau}}$$

cas simple : $F_{ext}(t) = F_0 \cos\omega t$

$$\int_0^{t} dt' \cos\omega t'\, e^{t'/\tau} = \mathrm{Re}\left[\int_0^{t} dt'\, e^{(i\omega + \frac{1}{\tau})t'}\right]$$

$$= \mathrm{Re}\left[\underbrace{\frac{e^{(i\omega + 1/\tau)t} - 1}{i\omega + 1/\tau}}\right] \qquad \text{etc.}$$

$$\mathrm{Re}\ \frac{(-i\omega + 1/\tau)\left(e^{+t/\tau}(\cos\omega t + i\sin\omega t) - 1\right)}{\omega^2 + 1/\tau^2}$$

$$= \frac{e^{t/\tau}\left(\frac{1}{\tau}\cos\omega t + \omega\sin\omega t\right) - 1/\tau}{\omega^2 + 1/\tau^2}$$

$$\boxed{v_x(t) = v_x(0)\, e^{-t/\tau} + \frac{F_0}{m}\,\frac{\frac{1}{\tau}\cos\omega t + \omega\sin\omega t - \frac{1}{\tau}e^{-t/\tau}}{\omega^2 + 1/\tau^2}}$$

C. Éq. diff. linéaire du 2nd ordre à coeff. constants

1. Équation homogène

$$\boxed{y''(x) + b\, y'(x) + c\, y(x) = 0} \qquad (*)$$

même idée que la méthode 2 : pour qu'une c.l. de y, y' et y'' soit nulle $\forall x \Rightarrow$ il faut que y soit du type exp.

Proposons l'ansatz $y(x) \to e^{r \cdot x}$

$$\underbrace{\text{Éq. diff. } (*)}_{\text{difficile}} \longrightarrow (r^2 + b r + c)\, e^{rx} = 0 \ \forall x$$

$\downarrow$

polynôme caractéristique : $\boxed{r^2 + b r + c = 0}$

éq. algébrique $\Rightarrow$ facile !

a. Cas $\Delta = b^2 - 4c \neq 0$

solutions : $r_\pm = -\frac{b}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{b^2 - 4c}$

Conclusion : si $r \in \{r_+, r_-\} \Rightarrow e^{rx}$ est solution de $(*)$

Donc, toute comb. lin. de $e^{r_+ x}$ et $e^{r_- x}$ est solution de $(*)$

> À RETENIR : la sol. générale de $y'' + b y' + c y = 0$
> (savoir retrouver)
> est $y(x) = A\, e^{r_+ x} + B\, e^{r_- x}$
> où r_+ et r_- sont les deux solutions du polynôme caractéristique

Rq : si $\Delta > 0 \Rightarrow r_+, r_- \in \mathbb{R} \Rightarrow$ les deux solutions sont des exponentielles réelles

si $\Delta < 0 \Rightarrow r_+, r_- \in \mathbb{C} \Rightarrow$ les deux solutions sont $e^{-\frac{b}{2}x \pm \frac{ix}{2}\sqrt{-\Delta}}$ i.e. exp × fct oscillante.

Illustration simple : $y'' + k^2 y = 0$

$\downarrow$

poly. caractéristique : $r^2 + k^2 = 0 \Rightarrow r = \pm ik$

sol. générale : $y(x) = A e^{ikx} + B e^{-ikx}$

si on cherche une solution réelle

$$\underbrace{\{ e^{ikx}, e^{-ikx} \}}_{\text{"base" de solutions complexes}} \longrightarrow \underbrace{\{ \cos kx , \sin kx \}}_{\text{base de solutions réelles.}}$$

À RETENIR : $\boxed{\text{la solution générale de } y'' + k^2 y = 0 \text{ est } y(x) = C \cdot \cos kx + D \cdot \sin kx}$

b. Cas $\Delta = 0$ $y'' + 2b\, y' + b^2 y = 0$

$\Downarrow$

le polynome caractéristique a ~~deux~~ une racine dégénérée : $r_+ = r_- = -b$

$\exists$ une seule solution e^{-bx} ? $\longrightarrow$ NON !!!

Eq. diff. linéaire d'ordre n $\longrightarrow$ n solutions indépendantes.
(à coeff. pas forcément csts)

$\Updownarrow$

lié au fait qu'il faut se donner n conditions initiales $y(0)$, $y'(0)$, ... $y^{(n-1)}(0)$

si il y a n choix indép. pour les conditions initiales, il y a n manières indép. d'évoluer.

si $y^{(n)}(x) = -a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \dots - a_0(x)\, y$

Quelle est la deuxième solution indép. ?

méthode 1 :

Écrivons l'éq. diff. comme

$$\left(\frac{d}{dx}+b\right)^2 y = 0 \qquad (**)$$

posons $y(x) = A(x)\, e^{-bx}$ et utilisons la règle :

$$\left(\frac{d}{dx}+b\right) A e^{-bx} = e^{-bx}\frac{dA}{dx} + A \underbrace{\left(\frac{d}{dx}+b\right) e^{-bx}}_{0}$$

$$\left(\frac{d}{dx}+b\right)\left(A e^{-bx}\right) = e^{-bx}\frac{dA}{dx}$$

$(**)$ donne $\quad \frac{d^2A}{dx^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad A(x) = \text{cste ou } x$

conclusion : la solution générale de

$$\boxed{\begin{gathered} y'' + 2by'' + b^2 y = 0 \text{ est} \\ y(x) = (B + C.x)\, e^{-bx} \end{gathered}}$$

deux cstes d'intégration

Méthode 2 :

on pose $r_\pm = -b \pm \sqrt{\Delta'}$ et on étudie la limite $\Delta' \to 0$ → on utilise la continuité des solution en fct des paramètres

$\frac{e^{r_+t} + e^{r_-t}}{2}$ et $\frac{e^{r_+t} - e^{r_-t}}{2\sqrt{\Delta'}}$ ont deux limites non triviales e^{-bx} et $x\, e^{-bx}$

QED.

2. Éq. diff. linéaire du 2^{nd} ordre avec 2^{nd} membre (complètement hors prg)

$$y''(x) + b(x)\, y'(x) + c(x)\, y(x) = h(x) \qquad (*)$$

a. l'eq. homogène possède 2 solutions indép. y_1 et y_2

b. Wronskien $\quad W = W[y_1, y_2] \overset{\text{def}}{=} y_1 y_2' - y_1' y_2$

$$W' = y_1 y_2'' - y_1'' y_2$$

$$= y_1(-b y_2' - \cancel{c y_2}) - (-b y_1' - \cancel{c y_1}) y_2$$

$$W' = -b\, W \quad \Rightarrow \quad W(x) = W(0)\, e^{-\int_0^x dx'\, b(x')}$$

$$\text{si } b = 0 \Rightarrow W = \text{cste}$$

c. avec second membre :

(A) $y = \lambda y_1 + \mu y_2$

$\lambda \searrow \quad \swarrow \mu$ deux fcts.

(B) $y' = \lambda y_1' + \mu y_2'$ où <u>on choisit</u> λ et μ t.q.

$$\underline{\lambda' y_1 + \mu' y_2 = 0} \quad (1)$$

$\Downarrow$

(C) $y'' = \lambda y_1'' + \mu y_2'' + \lambda' y_1' + \mu' y_2'$

on injecte (A), (B) & (C) dans $(*)$

$$\lambda\cancel{(y_1'' + b y_1' + c y_1)} + \mu\cancel{(y_2'' + b y_2' + c y_2)}$$
$$+ \lambda' y_1' \qquad\qquad + \mu' y_2' = h$$

on a obtenu une 2nde eq. pour λ' et μ'

résumons :
$$\begin{cases} \lambda' y_1 + \mu' y_2 = 0 \\ \lambda' y_1' + \mu' y_2' = h \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda' \\ \mu' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda' \\ \mu' \end{pmatrix} = \frac{1}{y_1 y_2' - y_1' y_2} \begin{pmatrix} y_2' & -y_2 \\ -y_1' & y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \lambda' = \frac{-y_2 h}{W} \quad \text{et} \quad \mu' = \frac{y_1 h}{W}$$

Conclusion : la solution générale de $(*)$ est

$$\boxed{y(x) = \underbrace{A \cdot y_1(x) + B\, y_2(x)}_{\text{sol. eq. homo}} + \underbrace{y_1(x) \int_x dx' \frac{y_2(x') h(x')}{W(x')} + y_2(x) \int^x dx' \frac{y_1 h}{W}}_{\text{sol. particulière}}}$$

D. Éq. diff. linéaire à coeff. csts d'ordre n (un peu difficile)

$$y^{(n)} + a_{n-1}\, y^{(n-1)} + \dots + a_1\, y' + a_0\, y = 0 \qquad (*)$$

n coeff. constants

Comb. lin. des dérivées $k$ième $= 0$ $\Rightarrow$ ansatz $y(x) = e^{rx}$

$\Downarrow$

polynôme caractéristique.

$$P(r) = r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \dots + a_1 r + a_0$$

Ce polynôme a n racines dans $\mathbb{C}$

$$P(r) = \prod_{k=1}^{n} (r - r_k)$$

<u>cas n° 1</u> : aucune racine dégénérée

$\Rightarrow$ la sol. générale de $(*)$ est

$$y(x) = C_n e^{r_n x} + C_{n-1} e^{r_{n-1} x} + \dots + C_1 e^{r_1 x}$$

...

n constantes d'intégration déterminées par les n cond. initiales $y(0), \dots, y^{(n-1)}(0)$

<u>Cas n° 2</u> : il existe une racine dégénérée m fois.

$$P(r) = \prod_{k=1}^{n-m} (r - r_k) \times (r - r_{n-m+1})^m$$

$(*)$ s'écrit $\quad \prod_{k=1}^{n-m} \left(\frac{d}{dx} - r_k\right) \times \left(\frac{d}{dx} - r_{n-m+1}\right)^m y(x) = 0$

j'utilise la propriété $\left(\frac{d}{dx} - b\right) A(x) e^{bx} = \frac{dA}{dx} e^{bx}$

i.e. $\quad \left(\frac{d}{dx} - b\right)^m A(x) e^{bx} = \frac{d^m A}{dx^m} e^{bx}$

qui montre que la racine dégénérée est associée aux m solutions indép. $\left(\beta_{m-1} x^{m-1} + \beta_{m-2} x^{m-2} + \dots + \beta_1 x + \beta_0\right) e^{bx}$

m constantes d'intégration.

V. Quelques exemples physiques

A. Chute d'une bille dans un fluide visqueux

bille de rayon a
lâchée sans vitesse
dans un fluide visqueux

1. Bilan des forces : $\vec{P}$, $\vec{F_A}$, $\vec{F_f}$ → frottement visqueux

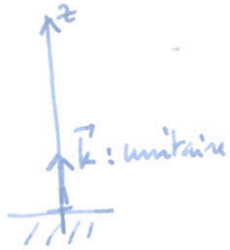
$\vec{P}$: poids ; $\vec{F_A}$: poussée d'Archimède

2. Caractérisation des forces.

$$\vec{P} = m\vec{g} \quad , \quad \vec{F_A} = - m_{eau}\,\vec{g} \quad , \quad \vec{F_f} = -\lambda \vec{v}$$

où $\lambda = 6\pi \mu a$ (μ : coeff. de viscosité dynamique)

$m_{eau} = \rho_{eau} \times \frac{4}{3}\pi a^3$



$$\vec{g} = -g\cdot\vec{k} \Rightarrow \vec{P} = -mg\,\vec{k}$$
$$\vec{F_A} = + m_{eau}\, g\, \vec{k}$$

3. P.F.D.

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{P} + \vec{F_A} + \vec{F_f}$$

on projette sur $\vec{k}$

si $\vec{v}(0) = v_z(0)\vec{k}$ $\Downarrow$ le mvt est rectiligne

$$m\,\dot{v}_z = -\lambda v_z + (m_{eau} - m)\, g$$

posons $\frac{1}{\tau} \stackrel{def}{=} \frac{\lambda}{m}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\dot{v}_z(t) + \frac{1}{\tau} v_z(t) = \left(\frac{m_{eau}}{m} - 1\right) g}$

éq. diff. linéaire du 1er ordre avec coeff. cst et 2nd membre (cst)

- Résolution de l'éq. diff.

a. Éq. homo. $\dot{v}_z + \frac{1}{\tau} v_z = 0 \Rightarrow$ solution de la forme e^{rt}

$(r + \frac{1}{\tau})\, e^{rt} = 0 \;\forall t \Rightarrow \underbrace{r + 1/\tau = 0}_{\text{polynôme carac.}} \Rightarrow r = -\frac{1}{\tau}$

$$v_z^{(homo)}(t) = C \cdot e^{-t/\tau}$$

b. sol. particulière (ici c'est facile !)

$$v_z^{(part.)}(t) = \tau \cdot \left(\frac{m_e}{m} - 1\right) g \equiv v_{lim}$$

c. Sol. générale

$$v_z(t) = v_z^{(homo)} + v_z^{(part)} = C e^{-t/\tau} + v_{lim}$$

d. Sélection de la solution (condition initiale)

1 pb phys. (i.e. une situation particulière) $\longrightarrow$ 1 solution

ex: $v_z(0) = v_0 \Rightarrow v_0 = C + v_{lim} \Rightarrow C = v_0 - v_{lim}$

Conclusion :

$$\boxed{\begin{gathered} v_z(t) = (v_0 - v_{lim})\, e^{-t/\tau} + v_{lim} \\ \text{où } v_{lim} \overset{def}{=} \left(\frac{m_e}{m} - 1\right) g \cdot \tau \end{gathered}}$$

e. Étude de la solution lorsque $v_0 = 0$ ($\Rightarrow$ cas limites)

$$v_z(t) = v_{lim}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

• aux temps courts : $t \ll \tau$ $\quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots$

$$1 - e^{-x} = x + O(x^2)$$

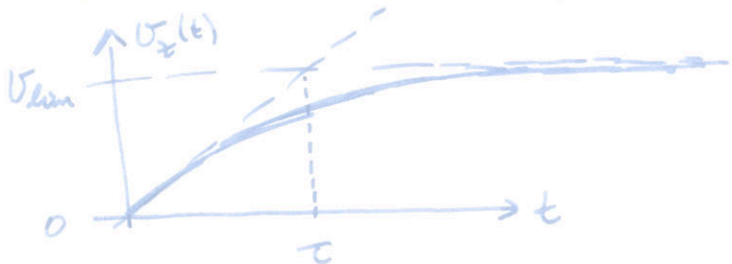
$$v_z(t) \underset{t \ll \tau}{\simeq} v_{lim} \frac{t}{\tau} = \left(\frac{m_e}{m} - 1\right) g \cdot t$$

(l'amortissement ne se fait pas sentir (λ a disparu))

• aux grands temps. :

$$v_z(t) \simeq v_{lim} \text{ si } t \gg \tau$$

si $m_e > m$ (bille en liège) $\Rightarrow v_{lim} > 0$
si $m_e < m$ (bille en plomb) $\Rightarrow v_{lim} < 0$



Exemple : bille dans l'eau.

$$\lambda = 6\pi \mu a$$

coeff. de viscosité dynamique

rayon

$\mu_{eau} = 10^{-3}$ Pa.s à 20°C

de Reynolds

$$R = \frac{2a\, v\, \rho_e}{\mu}$$

ici a

$$v_{lim} = g\tau \left|\frac{m_e}{m} - 1\right| = \frac{g m}{6\pi\mu a}\left|\frac{m_e}{m} - 1\right|$$

$$\Downarrow$$

$$R = \frac{1}{3\pi}\frac{g m \rho_e}{\mu^2}\left|\frac{m_e}{m} - 1\right|$$

$$\left\{\begin{array}{l} a = 1\,\text{mm} \\ \frac{\rho_e}{\rho} = \frac{m_e}{m} = 1 + \underline{10^{-3}} \end{array}\right.$$

presque la densité de l'eau !

$$\Downarrow$$

$$\frac{m_e}{m} - 1 = +10^{-3}$$

$$\tau = \frac{m}{\lambda} = \frac{\frac{4}{3}\cancel{\pi}\, \overset{\rho_e}{10^3}\, \cancel{(10^{-3})^3}}{6\cancel{\pi} \times \cancel{10^{-3}\,10^{-3}}} = \frac{4}{18} \approx 0.2\text{ s}$$

$$\boxed{\tau \simeq 0.2\text{ s}}$$

$$v_{lim} \simeq \left(\frac{m_e}{m} - 1\right) g\tau \simeq 10^{-3} \times 10 \times 0,2 \Rightarrow \underline{v_{lim} \simeq 2\text{ mm/s}}$$

$$R = \frac{2 \times \cancel{10^{-3}}\; 2 \times 10^{-3}\; 10^{3}}{\cancel{10^{-3}}} = 4$$

OK.

f. Loi horaire.

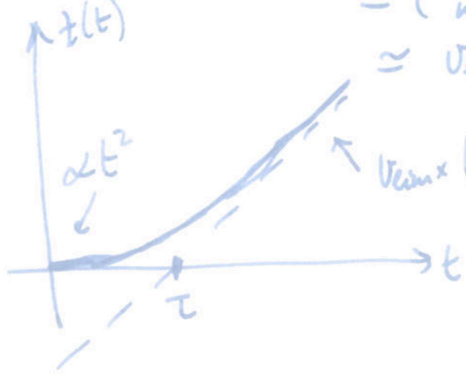
connaissant $v_z(t)$ on peut déduire $z(t)$ par simple intégration :

$$z(t) = \underbrace{z(0)}_{\substack{=0 \\ \text{(choix)}}} + \int_0^t dt'\, \underbrace{v_z(t')}_{v_{lim}\cdot(1 - e^{-t'/\tau})}$$

$$z(t) = v_{lim} \times \left[t - \tau\left(1 - e^{-t/\tau}\right)\right]$$

$$\simeq \left(\frac{m_e}{m} - 1\right) g\frac{t^2}{2} \text{ si } t \ll \tau$$

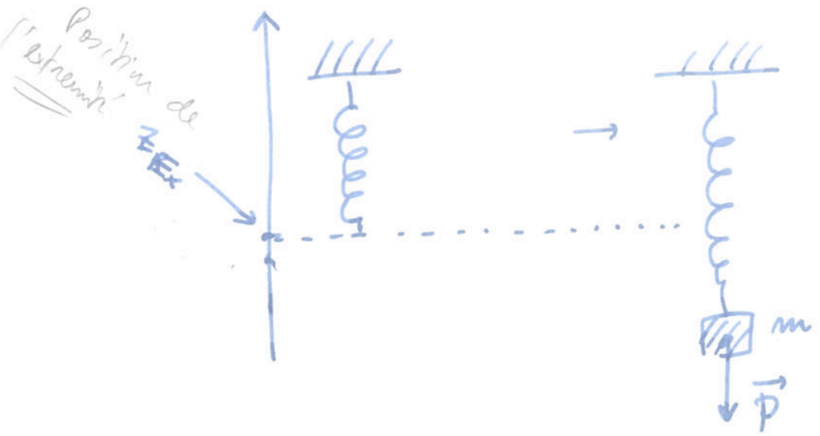
$$\simeq v_{lim} \times (t - \tau) \text{ si } t \gg \tau$$



$v_{lim} \times (t - \tau)$ est l'asymptote.

B. Masse soumise à une force de rappel

→ version très allégée du chapitre 6.



1. Bilan des forces : $\underset{\text{poids}}{\vec{P}}$, $\vec{F_r}$ (force de rappel)

2. Caractérisation : $\vec{P} = -mg\,\vec{k}$

$\vec{F_r} = -k.(z - z_{Ex})\,\vec{k}$

3. PFD $\quad m\vec{a} = \vec{P} + \vec{F_r}$

↓

si le mvt est rectiligne (i.e. $\vec{v}(0) = v_0\,\vec{k}$)

on peut seulement projeter sur $\vec{k}$

$$m\ddot{z} = -mg - k(z - z_{Ex})$$

$$\ddot{z} + \frac{k}{m}z = -g + \frac{k}{m}z_{Ex}$$

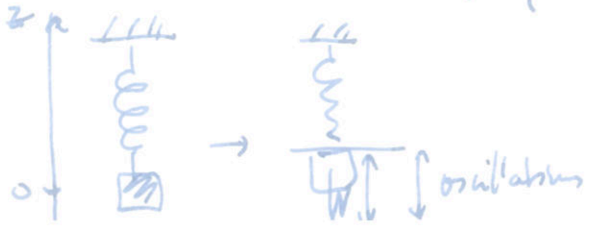
~~méthode 1 (maths)~~

Simplification : On choisit l'origine t.q. $z_{Ex} = \frac{mg}{k}$

⇓

l'éq. est $\boxed{\ddot{z} + \omega^2 z = 0}$ avec $\boxed{\omega \overset{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{k}{m}}}$

Au repos $z_{eq} = 0$



$\ddot{z} + \omega^2 z = 0 \longrightarrow$ (A) on a oublié le cours sur les éq. diff.

$z(t)$ est du type e^{rt}

$\Downarrow$

$(r^2 + \omega^2)\, e^{rt} = 0 \Rightarrow \underbrace{r^2 + \omega^2 = 0}_{\text{pol. carac.}}$

$r \in \{r_+, r_-\}$ où $r_\pm = \pm i\omega$

deux solutions linéairement indep. sont $e^{i\omega t}$ et $e^{-i\omega t}$ (complexes)

ou toute comb. linéaire

$$\frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} = \cos\omega t \quad \text{et} \quad \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} = \sin\omega t$$

(réelles)

(B) on se rappelle du cours :

la sol. ~~est~~ générale est

$$\boxed{z(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t}$$

la solution est une fonction oscillante, de pulsation $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ i.e. de période

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

ex: $k = 1\,N/m$, $m = 10\,g$ $\Rightarrow$ $T = 2\pi\sqrt{\frac{0.01}{1}}$

$T \approx 0{,}6\,s$

$\downarrow \times 100$ $\qquad$ $\times 10$

$m = 1\,kg \Rightarrow T \simeq 6\,s$

Sélection de la solution (conditions initiales)

$$\begin{cases} z(0) = z_0 \\ \dot{z}(0) = v_0 \end{cases}$$

$z(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$

$\dot{z}(t) = \omega(-A\sin\omega t + B\cos\omega t)$

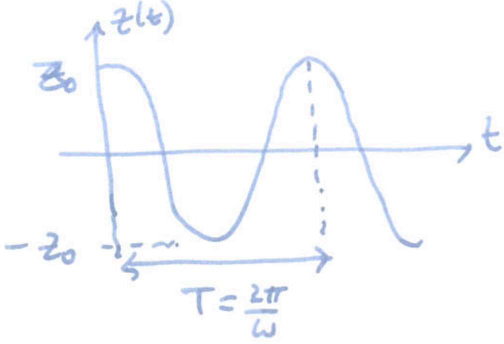
$\longrightarrow \begin{cases} A = z_0 \\ \omega B = v_0 \end{cases}$

~~la solution est $z(t) = z_0\cos\omega t$~~

la solution est

$$\boxed{z(t) = z_0 \cos\omega t + \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t}$$

exemple (i) $z_0 \neq 0$ & $v_0 = 0$ $\Rightarrow$ $z(t) = z_0 \cos\omega t$



l'amplitude est z_0

exemple (ii) $z_0 = 0$ & $v_0 \neq 0$ $\Rightarrow$ $z(t) = \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t$