22 octobre 2013

Chapitre 5. Énergie

I. Introduction. Importance des lois de conservations

A. Exemples

Encore une notion qui semble intuitive car elle est d'usage courant.... Mais de quoi parle-t-on ?

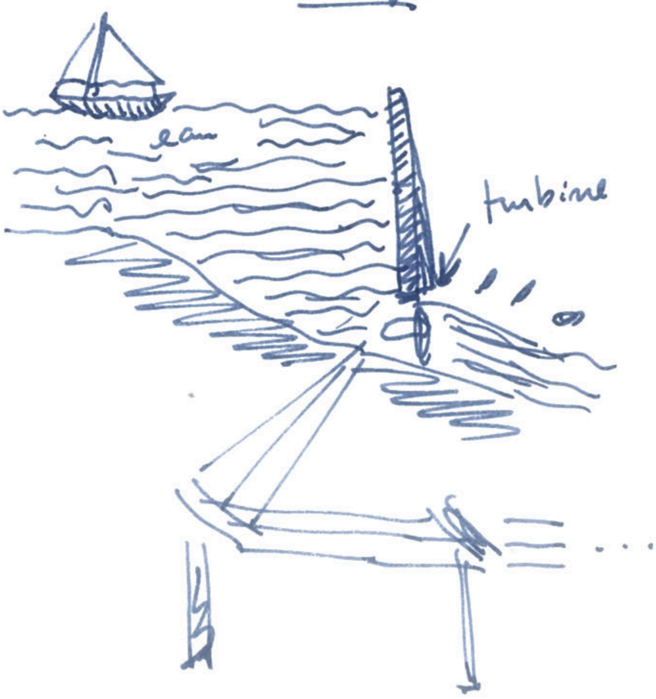
- Moteur d'une voiture :

Essence $\xrightarrow[\text{combustion}]{}$ Énergie chimique $\xrightarrow{\text{convertie}}$ Énergie mécanique

Énergie chimique ← liaisons chimiques brisées (énergie mécanique des électrons des molécules)

Énergie mécanique ← mouvement des pistons transmis aux roues

- Barrage



Énergie gravitationnelle de l'eau

↓

mvt de la turbine (énergie mécanique de la turbine)

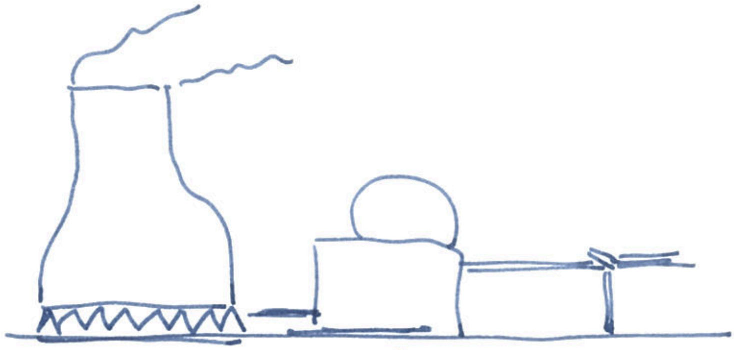
↓

Énergie électrique (déplacement des électrons dans les cables électriques)

↓ Énergie utilisée

→ pertes : Effet Joule ~~[illegible]~~ : énergie thermique (mvt de vibration des atomes)

• Centrale nucléaire



Énergie nucléaire (énergie de liaison des nucléons, i.e. leur énergie mécanique) ⟶ Énergie thermique

↓

Mvt d'une turbine (énergie mécanique)

↓

énergie électrique

↓

etc.

<u>Remarque</u> : au niveau microscopique, il n'y a que de l'E_c et de l'E_p

<u>ex</u> : énergie chimique : $E_m = E_c + E_p$ des e^- dans la molécule

<u>ex 2</u> : énergie thermique : E_c des atomes

thermique → notion statistique (température)

etc.

la seule énergie différant de l'E_c et l'E_p de particules matérielles est l'E_c et l'E_p des <u>champs</u> électromagnétiques.

B. Lois de Conservation

Ces petits exemples illustrent un des aspects les plus important : <u>la conservation de l'énergie</u>, qui s'est plutôt manifesté comme une <u>conversion</u> d'une forme en une autre dans ces exemples.

C'est une idée très importante (même <u>fondamentale</u>) en physique : la recherche et l'utilisation des lois de conservation.

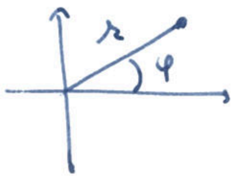
1. Nous allons voir que la loi de conservation de l'énergie (précisément, le théorème de l'énergie cinétique, qui exprime ~~aussi~~ la conversion de l'énergie cinétique en d'autres formes : $E_{potentielle}$, $E_{thermique}$...) permet de penser globalement plutôt que localement (analyse locale d'une loi horaire).

Cela fournit le langage pour raisonner en termes de gains et pertes

2. Dans la pratique, d'une manière terre à terre, les lois de conservations peuvent aider à résoudre un problème :
en permettant d'identifier des variables indépendantes.

ex: $m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \frac{k}{\|\vec{r}\|^2}$: 3 éqs. non linéaires du 2nd ordre couplées !

conservation du moment cinétique



$$\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r(\varphi)}\right) + \frac{1}{r(\varphi)} = -\frac{mk}{J^2} = cte$$

moment cinétique

une éq. diff. linéaire du 2nd ordre triviale !

3. La connaissance des lois de conservation permet de faire des découvertes !

Exemple sophistiqué : Découverte du neutrino.

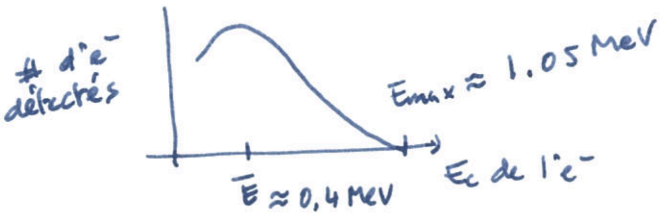
un neutron isolé est instable. $T_{vie} \approx 15\,min$ (durée de vie moyenne)
Dans les noyaux il est en général stabilisé ... mais pas toujours ! Certains noyaux peuvent en effet se désintégrer à cause de cette instabilité du neutron sous l'effet de l'interaction faible,

ce qu'on appelle la radioactivité β (découverte en 1911 par Bayer, Hahn et Meitner)

ex: transmutation du $^{210}_{83}Bi$ en $^{210}_{84}Po$ par émission d'un e^- (particule β^-) : l'exemple "historique"

on observe

mais l'énergie de l'e^- prend (dans l'expérience) un continuum de valeurs possibles ! (L'énergie des noyaux est fixée)



Source: Luc Valentin, Le monde subatomique Hermann

Pourquoi cette distribution d'énergie ? Pb avec la conservation de E ? NON !

1931 : W. Pauli fit l'hypothèse que la réaction mettait en jeu une autre particule non détectée qui emporte l'énergie "manquante"

$$^{210}_{83}Bi \longrightarrow {}^{210}_{84}Po + e^- + \underbrace{\bar{\nu}_e}_{}$$

anti-neutrino électronique.

qui vient de

$$n \rightarrow p^+ + \underbrace{e^- + \bar{\nu}_e}_{}$$

anti-neutrino pour conserver la charge leptonique et pas seulement la charge électrique (Deux autres lois de conservation !)

Magnifique !

4. Plus fondamentalement, l'existence de lois de conservations est liée à des propriétés d'invariance, une idée très profonde et fertile.

ex: conservation de l'énergie

$\updownarrow$

invariance par translation temporelle.

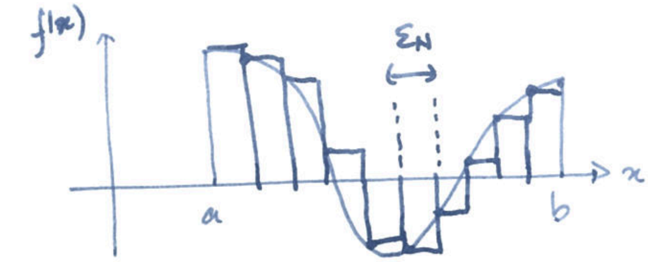
dessous : théorème de Noether

C'est tellement fondamental, que cette idée transcende les différentes grandes théories physiques (mécanique newtonienne, mécanique quantique, etc.)

II. Parenthèse mathématique : calcul intégral

A. Intégrale de Riemann

Déf. Soit $f(x)$ une fonction (bornée) sur $[a,b]$



on coupe l'intervalle en N intervalles (de largeurs égales pour simplifier)

$$\boxed{\int_a^b dx\, f(x) = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N-1} \varepsilon_N \cdot f(a + k\varepsilon_N) \quad \text{où } \varepsilon_N = \frac{b-a}{N}}$$

intégrale définie : somme (continue) de $f(x) \times$ accroissement infinitésimal

vocabulaire :

x : variable d'intégration (muette)

$$\int_a^b dx\, f(x) \equiv \int_a^b du\, f(u)$$

$f(x)$: intégrande

dx : élément infinitésimal

a, b : bornes d'intégration

Rq : les intervalles n'ont pas besoin d'être de largeurs égales, du moment que les largeurs tendent toutes vers 0 lorsque $N \to \infty$

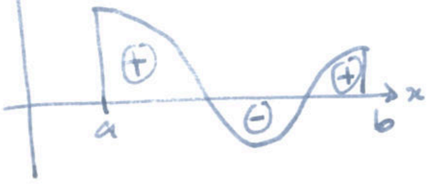
partition : $[a,b] = [\underset{=a}{x_0}, x_1) \cup [x_1, x_2) \cup \dots \cup [x_{N-1}, \underset{=b}{x_N}]$

avec $\delta x_n = x_{n+1} - x_n \underset{N\to\infty}{\to} 0 \quad \forall n$

$$\boxed{\int_a^b dx\, f(x) = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N-1} \delta x_k \cdot f(x_k)}$$

ou n'importe quelle valeur $\in [x_k, x_{k+1}]$

B. Interprétation géométrique :



aire algébrique entre la courbe et l'axe des abscisses.

C. Propriétés (évidentes)

- $\int_b^a dx\ f(x) = - \int_a^b dx\ f(x)$

- Chasles : $\int_a^b dx\ f(x) + \int_b^c dx\ f(x) = \int_a^c dx\ f(x)$

- Linéarité :

$$\int_a^b dx\ [\underbrace{\lambda\ f(x) + \mu\ g(x)}_{\lambda, \mu \in \mathbb{R}}] = \lambda \int_a^b dx\ f(x) + \mu \int_a^b dx\ g(x)$$

- Dimension :

$$\left[\int dx\ f(x) \right] = [dx] \cdot [f(x)] = [x] \cdot [f(x)]$$

D. Relation avec la dérivation

Soit $F(x) = \int_a^x dt\, f(t)$ une primitive de $f(x)$

$$F(x) \approx \sum_{n=0}^{N-1} \varepsilon \cdot f(a+n\varepsilon) \quad \text{pour } N \to \infty$$

$$F(x+\varepsilon) - F(x) \simeq \left(\sum_{n=0}^{N} - \sum_{n=0}^{N-1} \right) \varepsilon f(a+n\varepsilon) = \varepsilon f(\underbrace{a+N\varepsilon}_{x})$$

$$\frac{F(x+\varepsilon) - F(x)}{\varepsilon} \simeq f(x)$$

$$\Big\downarrow {\scriptstyle N \to \infty \, (\varepsilon \to 0)}$$

$$\boxed{F'(x) = f(x)}$$

$$\begin{tikzcd}
f(x) \arrow[r, bend left, "\text{dérivation } \frac{d}{dx} \text{ : pente}"] & f'(x) \arrow[l, bend left, "\text{intégration : aire}"]
\end{tikzcd}$$

Remarque : soient $F_1(x)$ et $F_2(x)$ deux primitives de $f(x)$

$$\Rightarrow F_1' = F_2' = f$$

$$\frac{d}{dx}\left(F_1(x) - F_2(x)\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\text{$F_1(x)$ et $F_2(x)$ diffèrent par une constante}}$$

E. Calcul des intégrales définies

- il faut "deviner" une primitive $F(x)$ de $f(x)$ (et non utiliser la formule de Riemann)

$\Downarrow$

$$\boxed{\int_a^b dx\, f(x) = \underbrace{\left[F(x) \right]_{x=a}^{x=b}}_{\text{notation}} = F(b) - F(a)}$$

Exemple : $\int_0^1 dx\, x = \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{2}$

problème : il n'est pas toujours facile de trouver $F(x)$!

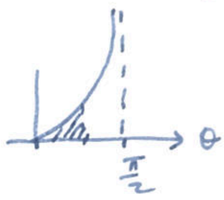
Tableau de quelques primitives

$\int^x du\, f(u)$ ou $\int dx\, f(x)$: notation pour une *intégrale indéfinie*

$f(x)$	$\int dx\, f(x) \equiv F(x)$
x^a pour $a \neq -1$	$\frac{1}{a+1} x^{a+1}$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$
$e^{\lambda x}$	$\frac{1}{\lambda} e^{\lambda x}$
$\cos x$	$\sin x$
$\sin x$	$-\cos x$
$\tan x = \frac{\sin}{\cos}$	$-\ln\lvert\cos x\rvert$

etc.

• **technique n°1 : changement de variable**



ex : $\displaystyle\int_0^{\pi/4} d\theta \tan\theta = \int_0^{\pi/4} d\theta \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

(on remarque que $d\theta \sin\theta = -d(\cos\theta)$

$$= -\int_0^{\pi/4} \frac{d(\cos\theta)}{\cos\theta} \xrightarrow[u=\cos\theta]{\text{on pose}} = -\int_1^{1/\sqrt{2}} \frac{du}{u} = \int_{1/\sqrt{2}}^{1} \frac{du}{u} = \Big[\ln|u|\Big]_{1/\sqrt{2}}^{1}$$

$\theta=\pi/4 \Rightarrow u = 1/\sqrt{2}$

$\theta = 0 \Rightarrow u = 1$

$= \ln 1 - \ln 1/\sqrt{2}$

$$\int_0^{\pi/4} d\theta \tan\theta = \frac{1}{2}\ln 2$$

ex 2 : $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \underset{x=\sin\theta}{=} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta\cos\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}} = \int_0^{\pi/2} du = \dots$

• **technique n°2 : intégration par parties** (IMPORTANT)

$f \to F$

$f' \to f$

$$(fg)' = f'g + fg' \Rightarrow f'g = (fg)' - fg'$$

$$\int_a^b dx\, f'(x)\, g(x) = \Big[f(x)\, g(x)\Big]_a^b - \int_a^b dx\, f(x)\, g'(x)$$

on pourrait écrire la formule comme :

dérivée

$$\boxed{\int_a^b dx\, f(x)\, g(x) = \Big[F(x)\, g(x)\Big]_a^b - \int_a^b dx\, F(x)\, g'(x)}$$

intégrée

application : $\displaystyle\int_0^{\infty} dx\, e^{-x} x = \underbrace{\Big[-e^{-x} x\Big]_0^{\infty}}_{=0} - \int_0^{\infty} (-e^{-x}) \cdot 1 \cdot dx$

$$= 1$$

• **technique n°3 : dérivation sous $\int$**

si $I(\lambda)$ est de la forme $I(\lambda) = \displaystyle\int_a^b dx \frac{\partial}{\partial\lambda} f(x,\lambda) = \frac{\partial}{\partial\lambda}\int_a^b dx\, f(x,\lambda)$

ex : $\displaystyle\int_0^{\infty} dx\, \underbrace{x e^{-ax}}_{-\frac{\partial}{\partial a} e^{-ax}} = -\frac{\partial}{\partial a} \underbrace{\int_0^{\infty} dx\, e^{-ax}}_{\text{facile } = 1/a} = \frac{1}{a^2}$

Pour $\displaystyle\underbrace{\int_0^{\infty} dx\, x^n e^{-ax}}_{\left(-\frac{\partial}{\partial a}\right)^n \int_0^{\infty} dx\, e^{-ax}}$ il est plus facile de procéder ainsi que de faire n I.P.P.

$$= \left(-\frac{\partial}{\partial a}\right)^n \frac{1}{a} = \frac{n!}{a^{n+1}}$$

V-

III. Travail

Cette notion va nous permettre d'associer un coût énergétique à une force.

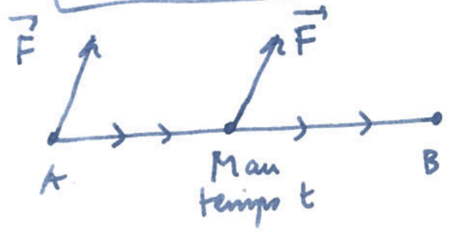
Nous allons considérer uniquement des chemins rectilignes.
Le cas général → 2^{nd} semestre.

A. Définitions

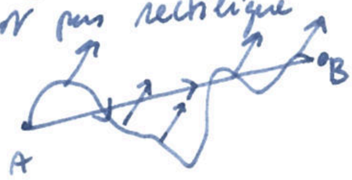
1. Travail d'une force constante

Considérons un point matériel qui se meut de A à B tout en subissant une force $\vec{F}$ constante (en direction, sens et norme).

$$\boxed{W_{A\to B}(\vec{F}) \overset{\text{def}}{=} \vec{F}\cdot\overrightarrow{AB} \quad \text{si } \vec{F} = \text{cste}}$$



(vrai même si le chemin n'est pas rectiligne)

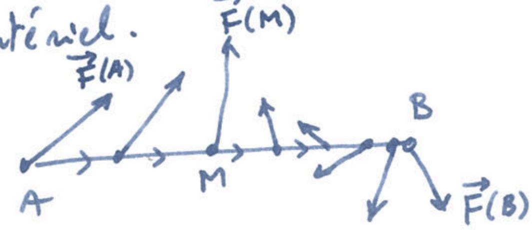


Propriété : $W_{B\to A}(\vec{F}) = - W_{A\to B}(\vec{F})$

2. Cas général :

La force dépend de l'endroit où se trouve le point matériel.

ex :



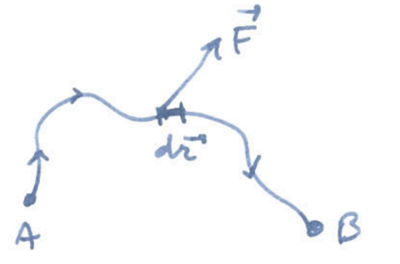
on introduit une séquence de points intermédiaires pour décrire la trajectoire

$$M_0 \equiv A,\ M_1,\ M_2,\ \dots,\ M_N \equiv B$$

$$W_{A\to B}(\vec{F}) = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N-1} \underbrace{\vec{F}(M_k)\cdot\overrightarrow{M_kM_{k+1}}}_{} = \lim_{N\to\infty} \sum_k W_{M_k\to M_{k+1}}(\vec{F})$$

sur le déplacement $\overrightarrow{M_kM_{k+1}}$ on peut supposer que $\vec{F} \simeq \overrightarrow{\text{cste}}$

ce qu'on écrit formellement :



$$(*) \quad \boxed{W_{A\to B}(\vec{F}) = \int_{A\to B} d\vec{r}\cdot\vec{F}}$$

dépend du chemin

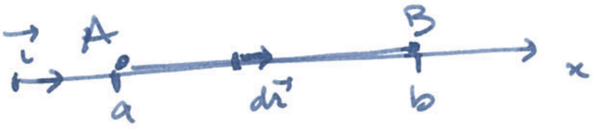
il est sous entendu que la force est prise en $\vec{r}$ $\rightarrow$ $\vec{F}(\vec{r})$

attention : cette écriture formelle ne nous renseigne pas comment calculer concrètement cette intégrale.

Application simple : $\vec{F}$ est une fonction de la position et $A \to B$ se fait le long d'un axe portant le vect. $\vec{i}$

$$\vec{F} = F_x(x)\,\vec{i} \underbrace{+\cdots}_{\text{inutile}}$$

y et z inutiles (fixés à 0 sur l'axe)



$$d\vec{r} = \vec{i}\,.\,dx$$

$$W_{A\to B}(\vec{F}) = \int_a^b dx\; F_x(x)$$

Cas général : Nécessité de paramétrer la trajectoire

$$\vec{F}(\vec{r},\vec{v},t) \xrightarrow[\text{simplifie}]{\text{on}} F_x(x, v_x, t)$$

la force pourrait dépendre de la vitesse.

La trajectoire est paramétrée $\rightarrow$ ex : Loi horaire $x(t)$

$$d\vec{r}(t) = \vec{i}\; dx(t) = \vec{i}\; \underbrace{\frac{dx(t)}{dt}}_{v_x(t)}\,.\,dt$$

intégrale sur une variable

$$W_{A\to B}(\vec{F}) = \int_{A\to B} d\vec{r}\cdot\vec{F} = \int_{t_A}^{t_B} \underbrace{dt\,.\,v_x(t)}_{dx}\,.\;F_x(x(t), v_x(t), t)$$

C'est en fait la manière générale (c'est un pb pratique !) de convertir l'écriture formelle (*) en une vraie intégrale au sens de Riemann, calculable

$$\vec{r}(t) \rightarrow d\vec{r} = dt\,.\,\frac{d\vec{r}(t)}{dt} \Rightarrow \boxed{W_{A\to B}(\vec{F}) = \int_{t_A}^{t_B} dt\; \vec{v}(t)\cdot\vec{F}(\vec{r}(t),\vec{v}(t),t)}$$

B. Propriétés

1. Dimension

$$[W_{A\to B}(\vec{F})] = \left[\int_{A\to B} d\vec{r}\cdot\vec{F}\right] = [d\vec{r}]\,[\vec{F}] = L\cdot\overbrace{[\text{Force}]}^{M L^2 T^{-2}} = M L^2 T^{-2}$$

$$\boxed{[W] = [\text{Énergie}]} \Rightarrow \text{unité S.I.} = \text{Joule}$$

2. Moteur vs Résistant (vocabulaire)

$W_{A\to B}(\vec{F}) > 0 \rightarrow$ on dit que le travail est moteur
(la force est motrice)

$W_{A\to B}(\vec{F}) < 0 \rightarrow$ on dit que le travail est résistant

3. Orthogonalité

si $\vec{F} \perp d\vec{r}$ le long de la trajectoire $\Rightarrow W_{A\to B}(\vec{F}) = 0$

ex: non trivial : force de Lorentz $\vec{F} = q\,\vec{v}\times\vec{B}$

$\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow \vec{F} \perp \text{à } d\vec{r}$

la force magnétique ne travaille pas !

↓

orbite cyclotron

propriétés basiques des intégrales

4. Relation de Chasles

$$A \longrightarrow B \longrightarrow C$$

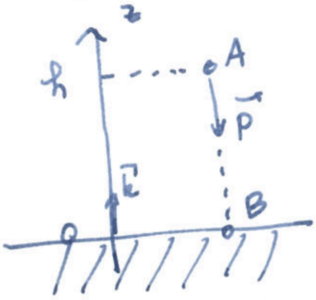
$$W_{A\to B}(\vec{F}) + W_{B\to C}(\vec{F}) = W_{A\to C}(\vec{F})$$

5. Linéarité

$$W_{A\to B}(\vec{F}_1 + \vec{F}_2) = W_{A\to B}(\vec{F}_1) + W_{A\to B}(\vec{F}_2)$$

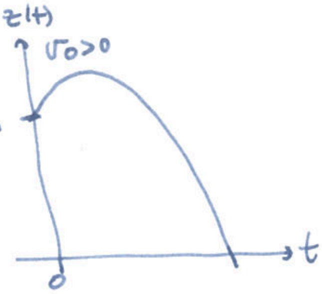
C. Exemples.

1. Travail du poids pendant la chute libre



$+$ P.F.D : $\ddot z = -g$

$$\begin{cases} z(0) = h \\ \dot z(0) = v_0 \end{cases} \Rightarrow \underline{z(t) = h + v_0 t - \frac{g}{2} t^2}$$



$$\vec P = -mg\vec k \quad = \text{cste}$$

$\Downarrow$

Facile !

$$W_{A\to B}(\vec P) = (-mg\vec k)\cdot\big(\underbrace{(z_B - z_A)\vec k}_{\overrightarrow{AB}}\big) = +mg(z_A - z_B)$$

$\Downarrow$

$$\boxed{W_{A\to B}(\vec P) = +mgh} > 0$$

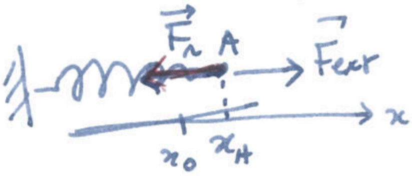
travail moteur

|| le travail ne dépend que de propriétés (géométriques) extrêmement simples de la trajectoire : $z_A - z_B$

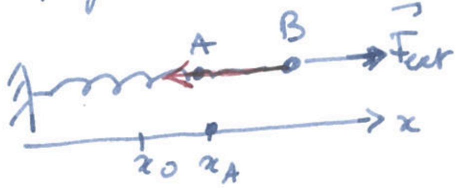
2. Travail de la force de rappel

$$\vec F_r = \underset{\substack{\shortparallel \\ \text{toujours } \ominus}}{-}\, k\cdot\underbrace{(x - x_0)}_{\text{élongation}}\cdot\vec\imath$$

$x_0 \leftarrow$ position au repos



$\Rightarrow$



$$W_{A\to B}(\vec F_r) = \underbrace{\int_{A\to B} d\vec r\cdot\vec F_r}_{\text{formel}} = -k\int_{x_A}^{x_B} dx\,(x - x_0) = -k\left[\frac{(x-x_0)^2}{2}\right]_{x_A}^{x_B}$$

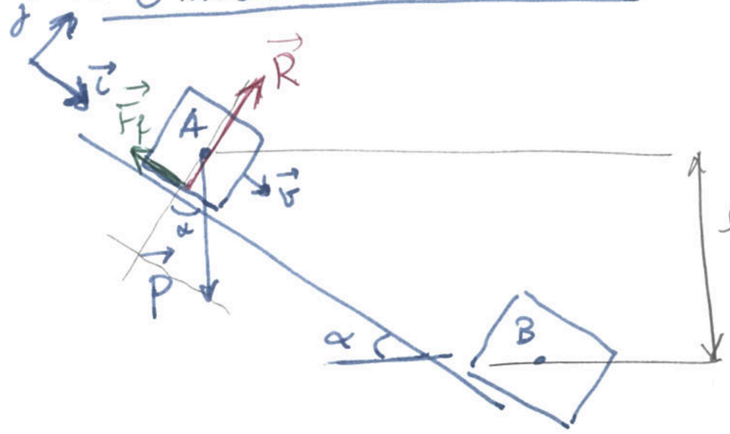
$d\vec r = dx\,\vec\imath$

$\vec F_r = -k(x - x_0)\vec\imath$

$$\boxed{W_{A\to B}(\vec F_r) = -\frac{k}{2}\left[(x_B - x_0)^2 - (x_A - x_0)^2\right]} = -k(x_B - x_A)\left(\frac{x_A + x_B}{2} - x_0\right)$$

ex : $x_A = x_0$: $W_{A\to B}(\vec F_r) = -\frac{k}{2}(x_B - x_0)^2 < 0$ (résistant)

3. Glissement sur un solide.



$\vec{P} = mg\,(\sin\alpha\,\vec{i} - \cos\alpha\,\vec{j})$

$\vec{R} = R_y\,\vec{j}$ avec $R_y = mg.\cos\alpha$

$\vec{F_f} = -\,\mathrm{sign}(v_x) \times k_c\, mg.\cos\alpha\,.\vec{i}$

$h = (x_B - x_A)\sin\alpha$

a. trajet direct de A à B ($v_x > 0\ \forall t$)

$$W_{A\to B}(\vec{P}) = \underbrace{\vec{AB}}_{(x_B - x_A)\vec{i}} \cdot \vec{P} \qquad (\vec{P} = \vec{cte})$$

$$= (x_B - x_A)\, mg \sin\alpha > 0 \qquad \text{(moteur)}$$

$$= +\, mg\, h$$

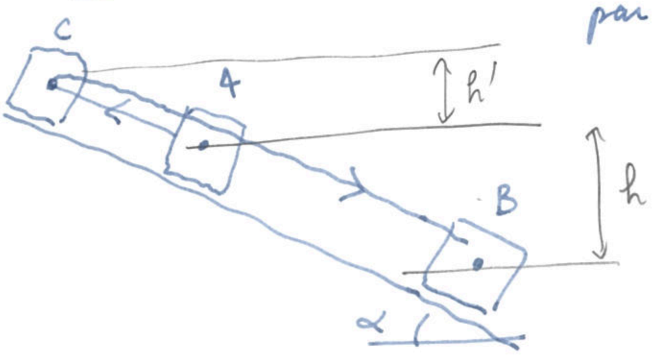
$$W_{A\to B}(\vec{F_f}) = \vec{AB} \cdot \vec{F_f} \qquad (\vec{F_f} = \vec{cte})$$

$$= -\,k_c\,.\,mg\cos\alpha\,(x_B - x_A)$$

$$\boxed{W_{A\to B}(\vec{F_f}) = -\frac{k_c}{\tan\alpha}\, mgh < 0} \quad \text{(résistant)}$$

b. Passage par le point C (v_x change de signe)

par exemple si $v_x(0) < 0$



$$W_{A\to C\to B}(\vec{P})$$

$$= \underbrace{W_{A\to C}(\vec{P})}_{\text{résistant}} + \underbrace{W_{C\to B}(\vec{P})}_{\text{moteur}}$$

$$= mg(z_A - z_C) + mg(z_C - z_B)$$

$$= mg(z_A - z_B) = mg\,h \quad \text{(moteur)}$$

inchangé $\Rightarrow$ $\boxed{W_{A\to C\to B}(\vec{P}) = W_{A\to B}(\vec{P})}$

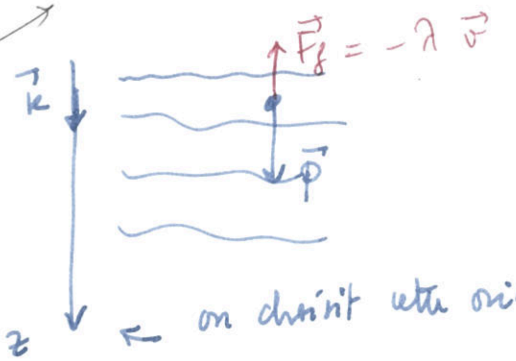
$$W_{A\to C\to B}(\vec{F_f}) = \underbrace{W_{A\to C}(\vec{F_f})}_{\text{résistant}} + \underbrace{W_{C\to B}(\vec{F_f})}_{\text{résistant}}$$

$$= \underbrace{\vec{AC}}_{-\frac{h'}{\sin\alpha}\vec{i}} \cdot (+k_c\, mg\cos\alpha\,\vec{i}) + \underbrace{\vec{CB}}_{+\frac{h+h'}{\sin\alpha}\vec{i}} \cdot (-k_c\, mg\cos\alpha\,\vec{i})$$

$$\Rightarrow \boxed{W_{A\to C\to B}(\vec{F_f}) = -\frac{k_c}{\tan\alpha}\, mg(h + 2h') \neq W_{A\to B}(\vec{F_f})}$$

4. Chute dans un fluide. (plus compliqué) ⇒ laisser en exercice ?

trop compliqué



← on choisit cette orientation pour avoir $v_e > 0$

Bilan des forces:

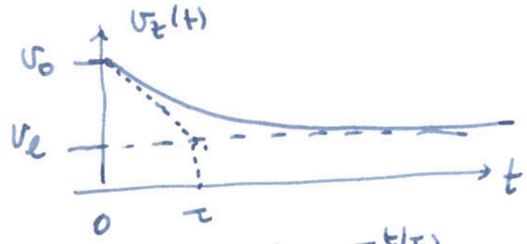
$$\vec{P} + \vec{F}_A = (m - m_{eau})\, g\, \vec{k}$$

$$\vec{F}_f = -\lambda \vec{v} \quad \text{on posera} \quad \boxed{\lambda = \frac{m}{\tau}}$$

au chapitre 4 nous avons obtenu:

$$\underline{v_z(t) = v_e + (v_0 - v_e)\, e^{-t/\tau}}$$

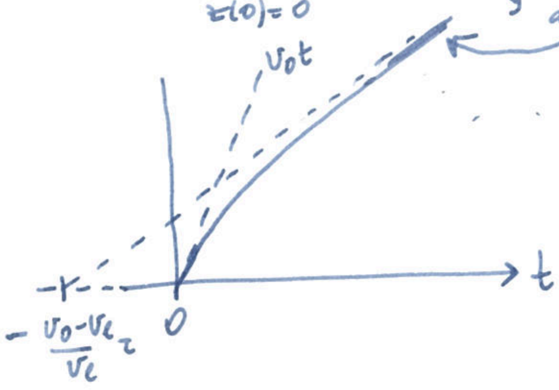
ex: si $v_0 > v_e$



et donc $z(t) = v_e t + (v_0 - v_e)\tau \cdot (1 - e^{-t/\tau})$

$z(0) = 0$

asymptote $v_e t + (v_0 - v_e)\tau$



Calculons $W_{A\to B}(\vec{F}_f)$ ...

Exercice: Calculer $W_{A\to B}(\vec{F})$ lorsque 1) $\frac{h}{v_e} \gg \tau$

2) $\frac{h}{v_e} \ll \tau$

Le calcul de $W_{A\to B}(\vec{F}_f)$ ne pose pas de difficulté :

$$W_{A\to B}(\vec{F}_f) = \underbrace{\int_{A\to B} d\vec{r}\cdot\vec{F}_f}_{\text{écriture formelle}} = \int_{A\to B} dz\, \underbrace{F_{fz}}_{-\lambda v_z = -\frac{m}{\tau}v_z}$$

écriture formelle
→ pas très utile pour le calcul car $\vec{F}_f = -\lambda\vec{v}$

ici on n'a pas le choix : il faut paramétrer proprement la trajectoire.

$$\int_{A\to B} dz\, F_{fz} = \int_{A\to B} \underbrace{dz(t)}_{dt\, v_z(t)}\left(-\right)\frac{m}{\tau}v_z(t) = -m\int_{t_A=0}^{t_B}\frac{dt}{\tau}\,v_z(t)^2$$

$$W_{A\to B}(\vec{F}_f) = \underbrace{-m\int_0^{t_B}\frac{dt}{\tau}\,v_z(t)^2}_{\text{la dimension [Energie] est évidente}} = -m\int_0^{t_B}\frac{dt}{\tau}\left[v_\ell + (v_0 - v_\ell)e^{-t/\tau}\right]^2$$

la dimension [Energie] est évidente

$u = t/\tau$

$$= -m\int_0^{t_B/\tau} du\left[v_\ell^2 + 2v_\ell(v_0 - v_\ell)\,e^{-u} + (v_0-v_\ell)^2 e^{-2u}\right]$$

$$\boxed{W_{A\to B}(\vec{F}_f) = -m\left[v_\ell^2\,\frac{t_B}{\tau} + 2v_\ell(v_0 - v_\ell)\left(1-e^{-t_B/\tau}\right) + \frac{(v_0-v_\ell)^2}{2}\left(1-e^{-\frac{2t_B}{\tau}}\right)\right]}$$

compliqué !! dépend de tous les détails de la trajectoire

t_B est donné par

$$h = v_\ell t_B + (v_0 - v_\ell)\tau\left(1-e^{-t_B/\tau}\right)$$

Cas limites :

* $v_0 = v_\ell \Rightarrow v_z(t) = v_\ell\ \forall t \Rightarrow t_B = h/v_\ell$

$$W_{A\to B}(\vec{F}_f) = -\frac{m}{\tau}v_\ell^2\,t_B = \underbrace{F_{fz}}_{-\frac{mv_\ell}{\tau}}\times h = -\frac{m}{\tau}v_\ell h$$

car ici $\vec{F}_f$ = cste

travail résistant

* si le temps de chute est "long" $t_B \gg \tau \Rightarrow$ on atteint très vite $v_z(t) \approx v_\ell \Rightarrow$ on retrouve le résultat précédent

* si le temps de chute est court $t_B \ll \tau$

$$v_z(t) \simeq v_\ell + (v_0 - v_\ell)\left(1-\frac{t}{\tau}\right) = v_0 + (v_\ell - v_0)\frac{t}{\tau}$$

Simplifions: $\boxed{v_0 = 0}$ $\Rightarrow$ $v_z(t) \simeq v_e \frac{t}{\tau}$

$z(t) \simeq \frac{v_e}{2\tau} t^2 \quad \Rightarrow \quad t_B \simeq \sqrt{\frac{2\tau h}{v_e}}$

$$W_{A\to B}(\vec{F}_f) \simeq -m \int_0^{t_B} \frac{dt}{\tau} v_e^2 \left(\frac{t}{\tau}\right)^2 = -m v_e^2 \int_0^{t_B/\tau} du\, u^2$$

$\Downarrow$

$$W_{A\to B}(\vec{F}_f) \simeq -\frac{m v_e^2}{3} \underbrace{\left(\frac{t_B}{\tau}\right)^3}_{\left(\frac{2h}{v_e \tau}\right)^{3/2} = \frac{2\sqrt{2}\, h^{3/2}}{v_e\tau \sqrt{v_e \tau}}}$$

$\Downarrow$

$$W_{A\to B}(\vec{F}_f) \simeq \underbrace{-\frac{m}{\tau} v_e h}_{\text{résultat obtenu dans l'autre limite}} \times \frac{1}{3}\sqrt{\frac{8h}{v_e \tau}}$$

Conclusion:

$$W_{A\to B}(\vec{F}_f) \simeq -\frac{m v_e h}{\tau} \quad \text{si} \quad \frac{h}{v_e} \gg \tau$$

$$\simeq -\frac{m v_e h}{\tau} \times \underbrace{\frac{1}{3}\sqrt{\frac{8h}{v_e \tau}}}_{\ll 1} \quad \text{si} \quad \frac{h}{v_e} \ll \tau \text{ et } v_0 = 0$$

$\Downarrow$

La réponse est une fonction compliquée de h et v_0

~~Q : Pourquoi $W_{A\to B}(\vec{P})$ est-il simple~~
~~mais pas $W_{A\to B}(\vec{F}_f)$?~~

Q : Pourquoi $W_{A\to B}(\vec{P})$ et $W_{A\to B}(\vec{F}_r)$ sont-ils simples à calculer et analyser, mais pas $W_{A\to B}(\vec{F}_f)$?