IV. Théorème de l'énergie cinétique

La notion de travail nous a permis de quantifier ce qu'une force apporte ou coûte en énergie.
Il faut maintenant utiliser cette notion pour comprendre comment le mouvement est affecté.

A. Démonstration et énoncé du théorème.

Le point de départ est le P.F.D

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \sum \vec{F}$$

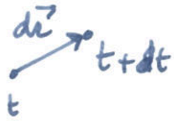
qui donne une information **locale** (en temps) permettant de déterminer la loi horaire.

en général $\sum_{F} \vec{F} = \vec{F}_{tot}(\vec{r}, \vec{v}, t)$ dépend de $\vec{r}$, $\vec{v}$ et t

le P.F.D est une éq. diff. pour $\vec{r}(t)$:

$$m \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \vec{F}_{tot}\left(\vec{r}(t), \frac{d\vec{r}(t)}{dt}, t\right)$$

travail élémentaire des forces:



$d\vec{r} = \vec{r}(t+dt) - \vec{r}(t) = \vec{v}.dt$

travail élémentaire : $\text{đ}W(\Sigma\vec{F}) = \sum_{F} \vec{F}.d\vec{r} = \sum_{F} \text{đ}W(\vec{F})$

on omet la dépendance en $\vec{r}$, $\vec{v}$ et t

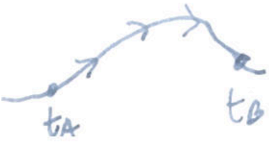
J'introduis une notation spécifique $\text{đ}W$ pour distinguer de la différentielle d'une fonction.

$$\sum \text{đ}W(\vec{F}) = \vec{F}_{tor}.d\vec{r} = m \frac{d\vec{v}}{dt}.\vec{r} = m \underbrace{\frac{d\vec{v}}{dt}.\vec{v}}_{\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\vec{v}^2)} dt$$

$$\sum \text{đ}W(\vec{F}) = \frac{1}{2} m \frac{d(\vec{v}^2)}{dt} dt$$

on intègre entre deux instants t_A et t_B

travail total de A à B



$$\underbrace{\sum \int_{A \to B} \text{đ}W(\vec{F})}_{\text{attention :}} = \frac{1}{2} m \int_{t_A}^{t_B} dt \frac{d(\vec{v}^2)}{dt} = \left[\frac{1}{2} m \vec{v}^2\right]_{t_A}^{t_B}$$

dépend de la trajectoire en général

on reconnait l'énergie cinétique

$$\boxed{E_c \overset{def}{=} \frac{1}{2} m \vec{v}^2}$$

Théorème de l'E_c :

$$\boxed{E_c(t_B) - E_c(t_A) = \sum_{\vec{F}} W_{A\to B}(\vec{F})}$$

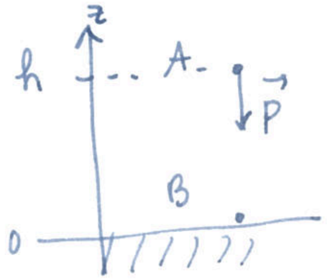
Remarques : * cela contient la même information que le P.F.D.

* contrairement au P.F.D., cela nous donne une information globale : sans m'intéresser aux détails de la loi horaire (en fait cachés dans le calcul de $W_{A\to B}(\vec{F})$), le théorème relie directement E_c (finale) à E_c (initiale).

* si on considère un système complexe (pas un point matériel mais un ensemble de points ou un solide) on obtient une information globale sur l'ensemble du système (sur E_c totale).

B. Exemples.

1. Chute libre.



on a calculé $W_{A\to B}(\vec{P}) = + m.g.h$

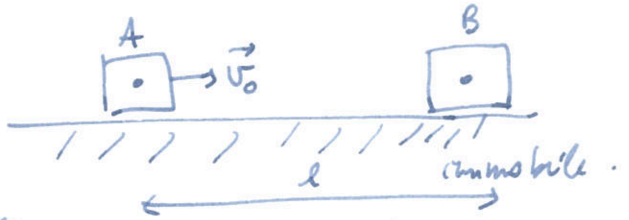
Sans déterminer la loi horaire, on obtient directement que (si $v_z(t_A)=0$)

$$\frac{1}{2} m v_z^2(t_B) - 0 = + m.g.h.$$

$$\Downarrow$$

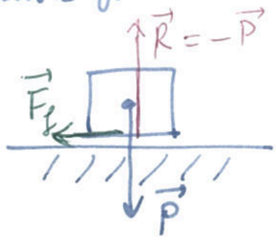
$$v_z(t_B) = \sqrt{2gh}$$

2. Mobile sur une table



Q : Quelle est la distance parcourue ?

Bilan des forces :



avec $\|\vec{F}_f\| = k_c \|\vec{R}\| = k_c mg$

Travaux : $W_{A\to B}(\vec{P}) = W_{A\to B}(\vec{R}) = 0$ (forces $\perp$ au déplacement)

$$W_{A\to B}(\vec{F}_f) = \vec{AB}\cdot\underbrace{\vec{F}_f}_{\text{cst}} = -k_c mg \cdot \underbrace{l}_{\text{inconnue}} \quad \text{(résistant)}$$

Application du théorème :

$$\underbrace{E_c(B)}_{0} - \underbrace{E_c(A)}_{\frac{1}{2}mv_0^2} = -k_c \cdot mg \cdot l$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{l = \frac{v_0^2}{k_c g}}$$

(indep. de m)

A.N. $v_0 = 1\,m/s$
$k_c = 0.5$
$\Downarrow$
$l = 0{,}2\,m = 20\,cm$

C. Version locale en temps

1. Puissance d'une force.

Déf. soit $\vec{v}$ la vitesse d'un objet au temps t subissant une force $\vec{F}$. La puissance développée par la force est

$$P_{\vec{F}} = \vec{F}\cdot\vec{v}$$

Dimension : $[P_{\vec{F}}] = \frac{[\text{Energie}]}{[\text{Temps}]} = M L^2 T^{-3}$

Unité (SI) : Watt

Relation avec le travail élémentaire :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow dW(\vec{F}) = \vec{F}\cdot d\vec{r} = P_{\vec{F}}\, dt$$

$P_{\vec{F}}$ mesure le travail par unité de temps.

le théorème entre deux instants très proches :

$$E_c(t_A+\Delta t) - E_c(t_A) \simeq \sum_{\vec F} \vec F \cdot \Delta \vec r \qquad \vec F \simeq \text{cste sur } \Delta \vec r \to 0$$

$$\downarrow$$

$$\frac{E_c(t_A+\Delta t) - E_c(t_A)}{\Delta t} \simeq \sum_{\vec F} \vec F \cdot \frac{\Delta \vec r}{\Delta t}$$

$$\downarrow \Delta t \to 0$$

$$\boxed{\frac{d}{dt} E_c = \sum_{\vec F} P_{\vec F}}$$

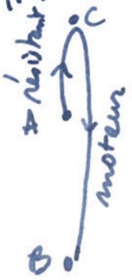
V. Forces conservatives vs non conservatives - Energie potentielle

Lorsqu'on a calculé quelques travaux, on a ~~qu'on~~ rencontré deux situations :

- le poids $\Rightarrow W_{A\to B}(\vec P) = mg(z_A - z_B)$ dépend uniquement des points de départ / arrivée
- la force de frottement $\Rightarrow W_{A\to B}(\vec F_f)$ dépend des détails de la trajectoire

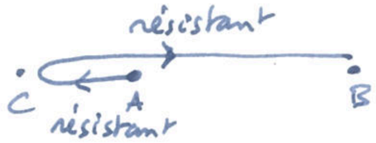
L'origine de la différence était :

Poids :



$\Rightarrow$ il y a compensation

Frottement :

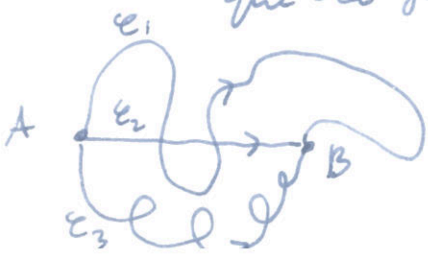


$\Rightarrow$ les travaux sont toujours résistants et s'ajoutent.

A. Forces conservatives

Définition :

Si $W_{A\to B}(\vec F)$ est indépendant du chemin entre A et B, on dira que la force est conservative.



B. Énergie potentielle

Pour toute force conservative, il existe une fonction de la position, $E_p(\vec{r})$, telle que

$$\boxed{W_{A\to B}(\vec{F}) = E_p(\underset{\text{initial}}{\vec{r}_A}) - E_p(\underset{\text{final}}{\vec{r}_B})}$$

en effet $W_{A\to C\to B}(\vec{F}) = W_{A\to C}(\vec{F}) + W_{C\to B}(\vec{F}) = E_p(A) - \cancel{E_p(C)} + \cancel{E_p(C)} - E_p(B)$
$= E_p(A) - E_p(B)$ ok

C. Situation unidimensionnelle

|| Toute force qui dépend seulement de la position est conservative dans le cas 1D.

force $\underbrace{F(x, v_x, t)}_{\text{non conservative}} \longrightarrow$ force $\underbrace{F(x)}_{\text{conservative}}$

Dem. à toute fonction $F(x)$, on peut associer une primitive, notée ici $-E_p(x)$

force $\boxed{F(x) = -E_p'(x)}$ $\Rightarrow$ $E_p(x)$ est définie à une constante additive près

$$W_{A\to B}(F) = \int_{A\to B} dx\, F = \int_{x_A}^{x_B} dx(-E_p'(x)) = \Big[-E_p(x)\Big]_{x=x_A}^{x=x_B}$$
$$= E_p(x_A) - E_p(x_B).$$

Exemples:

1. Poids $\to$ oui
on a vu que $W_{A\to B}(\vec{P}) = mg(z_A - z_B) \Rightarrow E_p(z) = mgz$
énergie potentielle gravitationnelle

2. Force de rappel $\to$ oui
$W_{A\to B}(\vec{F_r}) = \frac{k}{2}(x_A^2 - x_B^2)$ (si $x_0 = 0$) extrémité au repos $\Rightarrow E_p(x) = \frac{1}{2}kx^2$
énergie potentielle élastique

3. Frottement solide $\to$ non
$W_{A\to B}(\vec{F_s})$ dépend du chemin $\quad \vec{F_s} = -k_c\|\vec{R}\|\,\text{sign}(v_x)\,\vec{i}$
dépendance en $\vec{v}$

4. Frottement fluide $\to$ non
$\vec{F_f} = -\lambda \vec{v}$

D. Cas des dimensions supérieures (hors programme)

$\rightarrow$ sera étudié au 2nd semestre.

Remarquons seulement qu'il ne suffit pas que la force ne dépende que de la position $\vec{r}$ pour assurer l'existence d'une fonction énergie potentielle.

$\vec{F} \longrightarrow$ $\boxed{\vec{F}(\vec{r})}$: condition nécessaire pour que $\vec{F}$ soit conservative mais pas suffisante

mentionner cela

$\vec{F}$ est un vecteur $\longleftrightarrow$ E_p est un scalaire

$\longleftarrow$ dérivation

$\Downarrow$

il faut généraliser la notion de dérivation d'une fonction $E_p(\vec{r})$

Exemple 1 :

$$F_x = -\lambda x \xrightarrow{F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x}} E_p = +\lambda \frac{x^2}{2} + f(y)$$

$$F_y = -\lambda y \xrightarrow[F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y}]{} E_p = +\lambda \frac{y^2}{2} + g(x)$$

$\Downarrow$

Les deux expressions sont compatibles si $\begin{cases} f(y) = +\lambda \frac{y^2}{2} \\ g(x) = +\lambda \frac{x^2}{2} \end{cases}$

Conclusion $E_p = \frac{\lambda}{2}(x^2 + y^2)$

Exemple 2 :

$$\left.\begin{aligned} F_x = \lambda y &\longrightarrow E_p = -\lambda y x + f(y) \\ F_y = -\lambda x &\longrightarrow E_p = +\lambda x y + g(x) \end{aligned}\right\} \text{incompatibles}$$

$\Downarrow$

on ne peut pas écrire $\begin{cases} F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x} \\ F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y} \end{cases}$

$\Downarrow$

$\nexists E_p$

Condition d'existence de E_p :

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$$

Généralisation de la dérivation $E_p \longrightarrow \begin{cases} F_x = -\frac{\partial}{\partial x} E_p \\ F_y = -\frac{\partial}{\partial y} E_p \\ F_z = \dots \end{cases}$ $\qquad \overrightarrow{grad} \equiv \vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$

on écrira : $\vec{F} = -\vec{\nabla} E_p$

VI. Énergie mécanique

A. Systèmes conservatifs

1. Déf. On parlera de système conservatif lorsque toutes les forces en présence sont conservatives.

Notons simplement E_p l'énergie potentielle totale

i.e. $$\sum_{\vec{F}} W_{A\to B}(\vec{F}) = E_p(A) - E_p(B)$$

Th. de l'Ec $\Rightarrow$ $E_c(B) - E_c(A) = \sum_{\vec{F}} W_{A\to B}(\vec{F}) = E_p(A) - E_p(B)$

$$\Downarrow$$

$$E_c(B) + E_p(B) = E_c(A) + E_p(A)$$

2. Déf. La combinaison $E_c + E_p$ est appelée l'énergie mécanique

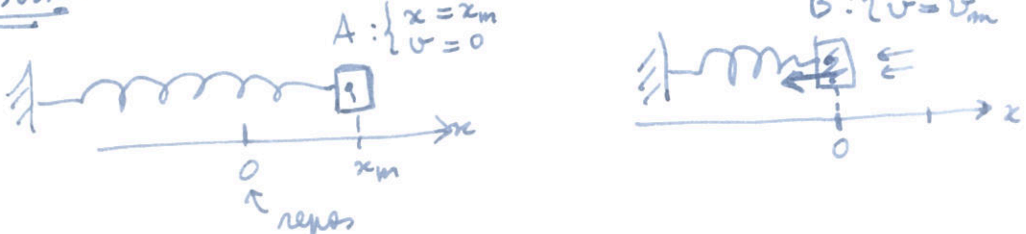
$$\boxed{E_m \overset{def}{=} E_c + E_p}$$

3. Conservation de l'Em

Dans un système conservatif (mettant seulement en jeu des forces conservatives), l'énergie mécanique est conservée : $E_m(t_B) = E_m(t_A)$

4. Exemples

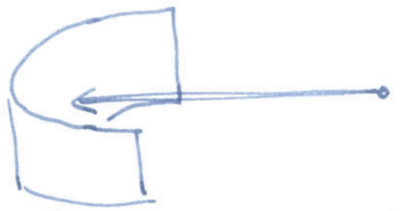
a. Ressort.



$$E_m = 0 + \frac{1}{2} k x_m^2 = \frac{1}{2} m v_m^2 + 0$$

$$\Rightarrow v_m = \sqrt{\frac{k}{m}}\, x_m$$

b. Expérience de Rutherford



l'énergie ~~des~~ d'une particule α était $E_c \simeq 7\,\text{MeV}$

Q: quelle est la distance minimale d'aproche ?

$$\vec{F}_{electrostat} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u_r} = \frac{Z_1 Z_2 q_e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u_r}$$

Plaçons-nous sur un axe : $F_{ele} = \frac{Z_1 Z_2 q_e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \Rightarrow \boxed{E_p(r) = \frac{Z_1 Z_2 q_e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}} \equiv Z_1 Z_2 \frac{e^2}{r}$

$$E_m = \overbrace{\frac{1}{2} m v_0^2 + \underbrace{0}_{\text{pour } r\to\infty}}^{\text{en A}} = \underbrace{0 + \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r_{min}}}_{\text{en B}}$$

v_0 : vitesse initiale correspondant à $E_c \simeq 7\,\text{MeV}$

$\Downarrow$

$$\boxed{r_{min} = \frac{2 Z_1 Z_2 e^2}{m v_0^2}} = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{E_c^{\text{initiale}}}$$

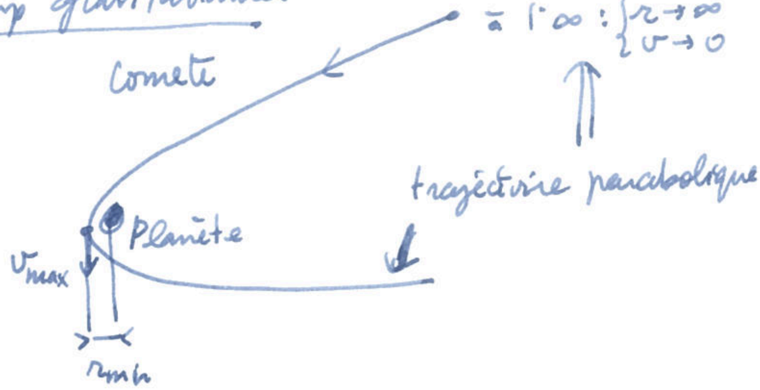
on donne $\underline{e^2 \simeq 1.44\ \text{eV.nm}}$ $\quad Z_1 = 2$ (He) $\quad Z_2 = 79$ (Au)

$$\Rightarrow \quad r_{min} = \frac{2\times 79 \times 1{,}44}{7\times 10^6} \simeq 33\times 10^{-6}\,\text{nm}$$

i.e. $\underline{\underline{r_{min} \simeq 33\ \text{fm}}}$ $\quad (1\,\text{fm} = 10^{-15}\,\text{m})$

|| qui on peut comparer à la "taille" du noyau
|| $r_A \simeq r_0 A^{1/3} \simeq 5.4\ \text{fm}$ $\quad$ ($r_0 \approx 1.25$ fm, $A = 79$)

c. Champ gravitationnel



$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2}\,\vec{u_r} \quad \Rightarrow \quad E_p = -\frac{GMm}{r}$$

$$E_m = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 - \frac{GMm}{r}$$

Pour la trajectoire parabolique $E_m = 0$

$$E_m = \underbrace{0 + 0}_{\text{à } l'\infty} = \frac{1}{2} m v_{max}^2 - \frac{GMm}{r_{min}}$$

$$\Downarrow$$

$$v_{max} = \sqrt{\frac{2GM}{r_{min}}}$$

d. Moralité

Ces exemples illustrent qu'on peut obtenir des informations intéressantes sans rentrer dans les détails (i.e. déterminer la loi horaire)

B. Systèmes non conservatifs

Dans de nombreuses situations intéressantes, le système met en jeu des forces conservatives et d'autres non (frottement, ...)

1. Déf : Énergie mécanique (dans le cas général)

Energie potentielle :

$$\sum_{\vec{F}\ \text{conservatives}} W_{A\to B}(\vec{F}) = \underbrace{E_p(A)}_{\text{initial}} - \underbrace{E_p(B)}_{\text{final}}$$

Energie cinétique : $E_c = \frac{1}{2} m \vec{v}^2$

Énergie mecanique : $E_m = E_c + E_p$

2. Théorème de l'énergie mécanique.

Th. de l'Ec : $\underbrace{E_c(B)}_{\text{final}} - \underbrace{E_c(A)}_{\text{initial}} = \sum_{\vec{F}} W_{A\to B}(\vec{F})$

on sépare la somme

$$= \underbrace{\sum_{\vec{F}\ \text{conserv.}} W_{A\to B}(\vec{F})}_{\underbrace{E_p(A)}_{\text{initial}} - \underbrace{E_p(B)}_{\text{final}}} + \sum_{\vec{F}\ \text{non conserv.}} W_{A\to B}(\vec{F})$$

Énoncé du théorème :

$$\boxed{E_m(B) - E_m(A) = \underbrace{\sum_{\vec{F}\ \text{non conservatives}} W_{A\to B}(\vec{F})}_{\text{écart à la conservation de l'énergie, ou plutôt à sa conversion en d'autres formes (thermique...}}}$$

3. Remarques

* on a vu que le calcul du travail d'une force <u>non conservative</u> requiert en général les détails de la loi horaire.

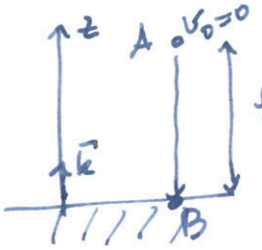
Dans ce cas, même si l'analyse des gains et pertes d'énergie est intéressante, l'approche ne permet pas de donner des informations aussi précises que dans le cas des systèmes conservatifs (j'entends : de manière aussi « économique »)

* Si on considère un système composite, constitué de <u>plusieurs points matériels</u>, ~~l'énergie mécanique~~ on doit prendre en compte ceux-ci dans E_m :

$$E_m = \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^{\,2} + \underbrace{\sum_i E_p(\vec{r}_i)}_{\text{énergie potentiel de chaque point matériel}} + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{(i,j)} E_p^{int}(\vec{r}_i - \vec{r}_j)}_{\text{interaction}}$$

somme sur tous les points matériels

4. Exemple : chute d'un objet en présence de frottement visqueux



Bilan :

$$\vec{P} = -mg\,\vec{k}$$

$$\vec{F_f} = -\lambda\,\vec{v} \quad \text{où } \lambda \overset{\text{déf}}{=} \frac{m}{\tau}$$

$$E_m = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 + mgz$$

$$E_m(B) - E_m(A) = \frac{1}{2}m v_B^2 - mgh = \underline{W_{A\to B}(\vec{F_f})}$$

dépend de la loi horaire et pas seulement de v_B ou z_B et z_A

Hypothèse supplémentaire :

on anticipe l'existence d'une vitesse limite et nous supposons que $v_z(t) \simeq -v_\ell \quad \forall t$ (on a choisi $v_\ell > 0$)

i.e. nous supposons que le régime permanent est atteint très vite : $t_{chute} \gg \tau$

$\vec{v} \approx \vec{cste} \Rightarrow \vec{F_f} \approx \vec{cste} \Rightarrow$ cela rend possible le calcul

de $W_{A\to B}(\vec{F_f}) \simeq -\lambda v_\ell \times h = -\frac{m}{\tau} v_\ell h$

travail résistant

th. de l'E_m $\Rightarrow \frac{1}{2}m v_\ell^2 - mgh \simeq -\frac{m}{\tau} v_\ell h$

i.e. $v_\ell^2 + \frac{2h}{\tau}v_\ell - 2gh \simeq 0$

d'où $v_\ell \simeq \sqrt{\left(\frac{h}{\tau}\right)^2 + 2gh} - \frac{h}{\tau}$

$$= \frac{h}{\tau}\sqrt{1 + \frac{2g\tau^2}{h}} - \frac{h}{\tau}$$

l'hyp. est $t_{chute} \gg \tau$ i.e. $h \gg (?) \leftarrow g\tau^2$ échelle de long. caract. du pb.

$\Rightarrow$ on doit développer l'expression trouvée pour être cohérent

$$v_\ell \simeq \frac{h}{\tau} \times \left(1 + \frac{g\tau^2}{h} + \dots\right) - \frac{h}{\tau} \Rightarrow \underline{\underline{v_\ell \simeq g\tau}} \quad \text{ok.}$$

Puissance dissipée par le frottement :

$\mathcal{P}_{frott} = -\vec{F_f}\cdot\vec{v} = -\frac{m}{\tau}\vec{v}^2 \simeq -\frac{m}{\tau}(g\tau)^2$ dès que v_ℓ est atteinte

$$\underline{P_{frott} \simeq -mg^2\tau} = -\frac{(mg)^2}{\lambda}$$

contre-intuitif ! si $\lambda \searrow \Rightarrow P_{frott} \nearrow$. (car $v_\ell \nearrow$)

c'est vrai en régime permanent, mais le temps mis à atteindre le régime permanent augmente !

À v_0 et h fixés $W_{A\to B}(\vec{F_f})$.

VII. Équilibre et stabilité

L'introduction de la notion d'énergie nous fournit le "bon langage" pour analyser les problèmes de stabilité des équilibres.

A. Systèmes conservatifs.

considérons un système conservatif

$\downarrow$

$$\begin{cases} E_c = \frac{1}{2} m v_x^2 \\ E_p(x) \end{cases} \quad \Big| \quad \text{situation \underline{unidimensionnelle}.}$$

1. Condition d'équilibre

$\exists\, x_{eq}$ t.q. $\begin{cases} x = x_{eq} \\ v_x = 0 \end{cases}$ soit solution du P.F.D ($\forall t$)

$v_x = 0 \Rightarrow \sum \vec{F} = \vec{0} \qquad F_x(x_{eq}) = 0 \Rightarrow \boxed{E_p'(x_{eq}) = 0}$

> Un point matériel est à l'équilibre si $\sum \vec{F} = 0$, ce qui correspond à un où $E_p'(x) = 0$

2. Stabilité

Q: Que se passe-t-il si on s'éloigne "légèrement" de la position d'équilibre ?

supposons $x = x_{eq} + \delta x$ avec $\delta x \to 0$

a. Déf :

équilibre stable. Si les forces tendent à ramener le point matériel vers x_{eq}

équilibre instable. à l'inverse, si les forces tendent à l'éloigner de x_{eq}

Nous allons "traduire" la condition de stabilité sur Ep.

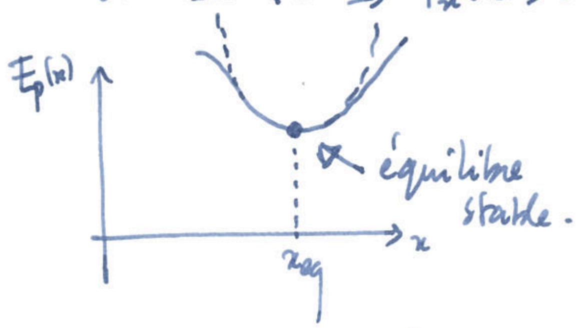
Équilibre stable : $x = x_{eq} + \Delta x$

si $\Delta x > 0 \Rightarrow F_x(x) < 0$ i.e. $E_p'(x) > 0$ pour $x > x_{eq}$

l'énergie croît dans le sens $x \nearrow$ à partir de x_{eq}

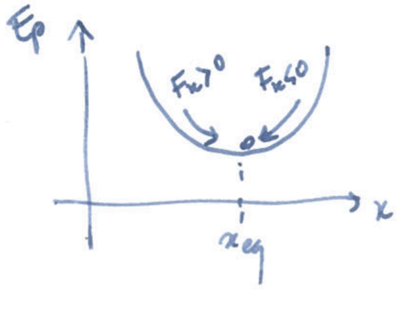
si $\Delta x < 0 \Rightarrow F_x(x) > 0$ i.e. $E_p'(x) < 0$ pour $x < x_{eq}$

l'énergie croît en allant vers les $x < x_{eq}$, i.e. Ep est une fct décroissante.



En général (si $E_p''(x_{eq}) \neq 0$)

on aura



$$E_p(x) \underset{x \sim x_{eq}}{\simeq} E_p(x_{eq}) + \underbrace{\frac{1}{2} E_p''(x_{eq}) \cdot (x - x_{eq})^2}_{\text{énergie d'oscillateur harmonique}}$$

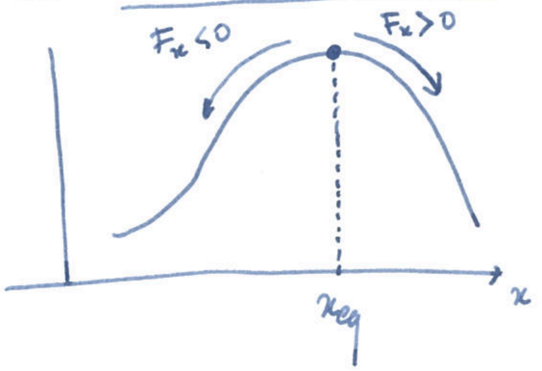
Rq : en l'absence de dissipation (frottement), un écart induit des oscillations autour de x_{eq}.

Une position d'équilibre stable correspond à un minimum local de Ep

Équilibre instable : si x_{eq} (où $E_p'(x_{eq}) = 0$) n'est pas un minimum de $E_p(x)$ $\Rightarrow$ l'équilibre est <u>instable</u>.

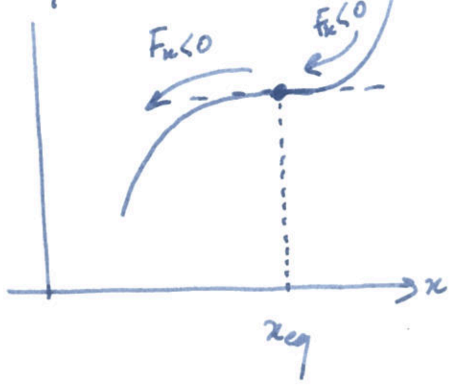
Deux cas :

x_{eq} est un <u>maximum de $E_p(x)$</u>



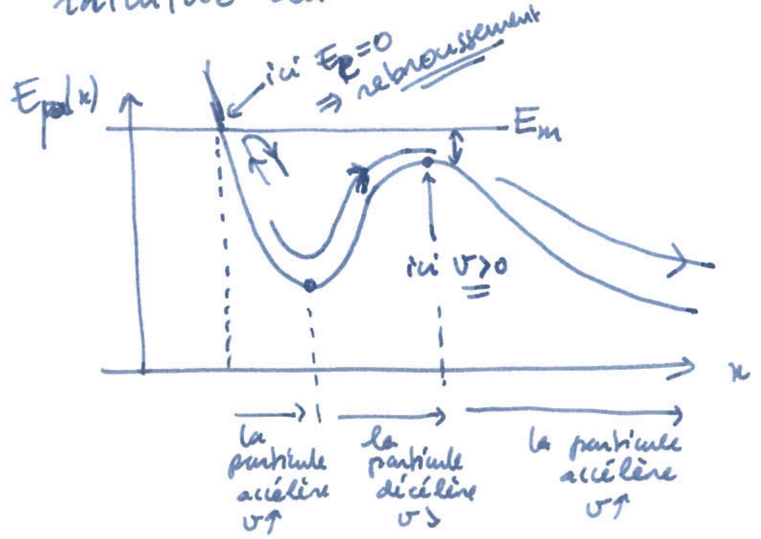
ou

x_{eq} est un <u>point d'inflexion</u>



3. Conclusion : Cette discussion donne une image très intuitive du mouvement si l'on connaît $E_p(x)$.

$$E_m = \underbrace{E_c}_{>0} + E_p(x)$$



B. Systèmes non conservatifs

1 _ Présence de frottement fluide : $\vec{F}_f = 0$ si $\vec{v} = 0$ $\Rightarrow$ rien ne change dans la discussion précédente, sinon que le frottement induit l'amortissement des oscillations, lorsqu'on s'écarte de l'équilibre.

2. Frottement solide.

Le frottement solide peut stabiliser des situations qui ne sont pas des équilibres.

ex :