

EXAMEN FINAL DE PHYSIQUE STATISTIQUE

Vendredi 11 mai 2018

*Durée de l'épreuve : 3 heures.**L'utilisation de documents, téléphones portables, calculatrices, ... est interdite.***Recommandations :**Lisez attentivement l'énoncé et **rédigez** *succinctement* et *clairement* votre réponse.Vérifiez vos calculs (analyse dimensionnelle, etc) ; n'oubliez pas de vous **relire**.Pensez aux **informations en annexe**.**Question de cours (~ 15mn)**

1/ Quelle situation physique est-elle décrite par l'ensemble canonique ? Rappeler l'expression de la probabilité canonique P_ℓ^c d'occupation d'un microétat ℓ d'énergie E_ℓ .

2/ On considère un gaz de N atomes soumis à un potentiel, décrit par l'hamiltonien

$$H = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\vec{p}_i^2}{2m} + V(\vec{r}_i) \right) \quad (1)$$

Dans le cadre classique, à quoi correspondent les microétats ? Quelle forme prend la distribution canonique ? On la notera $\rho^c(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_N)$.

3/ La densité moyenne est donnée par

$$n(\vec{r}) = N \int d^3\vec{r}_2 \dots d^3\vec{r}_N d^3\vec{p}_1 \dots d^3\vec{p}_N \rho^c(\vec{r}, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_N). \quad (2)$$

Exprimer $n(\vec{r})$ en fonction de $V(\vec{r})$ (ne pas se préoccuper de la normalisation, mais seulement de la dépendance avec \vec{r}). Que devient $n(\vec{r})$ pour un potentiel harmonique $V(\vec{r}) = (1/2) m\omega^2 \vec{r}^2$? Tracer l'allure de la densité $n(0, 0, z)$. Quelle est la distance typique sur laquelle le gaz s'étend ?

BEC dans un piège harmonique : effet de taille finie (~ 1h20mn)

La situation étudiée : Les gaz atomiques ultrafroids sont confinés dans des pièges magnéto-optiques qui réalisent un confinement harmonique. Nous supposons que le piège est isotrope et contient N bosons de spin nul, supposés sans interaction.

Objectif : Dans un premier temps nous analysons le phénomène de condensation de Bose-Einstein en nous basant sur la formule semiclassique pour la densité des états individuels, ce qui correspond à la limite thermodynamique. Le calcul exact (quantique) de la densité d'états fait apparaître une correction au résultat semiclassique, dont nous allons étudier l'effet sur le phénomène de condensation, dans un deuxième temps. On parle « d'effet de taille finie ».

1/ L'énergie d'un atome est $\varepsilon(\vec{r}, \vec{p}) = \frac{1}{2m} \vec{p}^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 \vec{r}^2$. En utilisant la règle semiclassique, calculer la densité des états individuels, notée $\rho_{sc}(\varepsilon)$.

2/ Rappeler l'expression de la distribution de Bose-Einstein $\bar{n}^B(\varepsilon)$. Quelle est la contrainte sur le potentiel chimique (si le fondamental individuel a une énergie $\varepsilon_0 = 0$) ?

On se place à la limite thermodynamique.

3/ En utilisant une formule grand canonique, exprimer le nombre de bosons N comme une intégrale faisant intervenir $\rho_{\text{sc}}(\varepsilon)$ et $\bar{n}^{\text{B}}(\varepsilon)$.

4/ Décrire le phénomène de condensation de Bose-Einstein. Rappeler la condition d'apparition de ce phénomène et donner l'équation définissant la température de Bose-Einstein T_{BE} . Montrer que $k_B T_{\text{BE}} = [N/\zeta(3)]^{1/3} \hbar\omega$.

5/ Lorsque $T \leq T_{\text{BE}}$, que devient le potentiel chimique μ ? Exprimer alors le nombre $N_{\text{ex}}(T)$ de bosons dans les états excités comme une intégrale, que l'on calculera. Exprimer $N_{\text{ex}}(T)$ en fonction de N et T/T_{BE} . Déduire le nombre $N_0(T)$ de bosons dans le fondamental individuel.

6/ **Correction à la densité d'états semiclassique.**— L'oscillateur harmonique isotrope est caractérisé par un spectre d'énergies $\varepsilon_\ell = \ell \hbar\omega$ avec $\ell \in \mathbb{N}$, dégénérées $d_\ell = (\ell + 2)(\ell + 1)/2$ fois. Justifier que, dans la limite $\varepsilon \gg \hbar\omega$, la densité des états individuels semiclassique est corrigée comme

$$\rho(\varepsilon) = \rho_{\text{sc}}(\varepsilon) + \delta\rho(\varepsilon) \simeq \frac{\varepsilon^2}{2(\hbar\omega)^3} + \frac{3\varepsilon}{2(\hbar\omega)^2}. \quad (3)$$

L'objet de la fin du problème est d'étudier l'effet de ce premier terme correctif à la densité d'états, sur l'expression de la fraction condensée. Nous allons voir que la température de Bose-Einstein est modifiée et noterons \tilde{T}_{BE} la nouvelle température critique.

7/ En supposant $T \leq \tilde{T}_{\text{BE}}$ (pour l'instant \tilde{T}_{BE} est inconnue), déduire la nouvelle expression du nombre de bosons excités $N_{\text{ex}}(T)$, sous forme intégrale. On exprimera le résultat en fonction de N et T/T_{BE} (où T_{BE} est définie au 4/). Donner la nouvelle expression de $N_0(T)$. Tracer les deux expressions de $N_0(T)$ obtenues au 5/ et dans cette question sur un même graphe : la nouvelle température critique \tilde{T}_{BE} est-elle au-dessus ou en-dessous de T_{BE} ?

8/ On cherche une expression approchée de \tilde{T}_{BE} par une méthode perturbative : on écrit $\tilde{T}_{\text{BE}} = T_{\text{BE}} + \delta T_{\text{BE}}$ où l'on suppose $\delta T_{\text{BE}} \ll T_{\text{BE}}$. Partant de $N = N_{\text{ex}}(\tilde{T}_{\text{BE}})$ où N_{ex} est l'expression de la question 7/, résoudre l'équation perturbativement, au premier ordre en $\epsilon \stackrel{\text{def}}{=} \delta T_{\text{BE}}/T_{\text{BE}} \ll 1$: montrer que $k_B \delta T_{\text{BE}} \simeq -\frac{\zeta(2)}{2\zeta(3)} \hbar\omega$.

9/ **A.N. :** L'interaction répulsive entre les atomes tend à faire s'étaler le gaz et diminuer la densité au milieu du piège, ce qui a pour effet de diminuer la température critique et apporte une autre correction à T_{BE} , faible car le gaz est dilué à la transition, donnée par $\delta T_{\text{BE}}^{(\text{int})}/T_{\text{BE}} \simeq -1.3 \frac{a}{\ell_\omega} N^{1/6}$, où a est la longueur de collision (\propto la force de l'interaction) et $\ell_\omega \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\hbar/(m\omega)}$. Les premières expériences de BEC utilisaient des atomes alcalins de rubidium ${}^{87}_{37}\text{Rb}$ (masse $M = 87 m_p$) caractérisés par $a = 5.77$ nm, pour un confinement $\omega \simeq 100$ Hz.

Calculer ℓ_ω en μm . Pour $N = 10^6$ atomes, l'une des corrections, $\delta T_{\text{BE}}/T_{\text{BE}}$ ou $\delta T_{\text{BE}}^{(\text{int})}/T_{\text{BE}}$, est-elle dominante (on donne $\zeta(2)/\zeta(3)^{2/3} \simeq 1.455$) ?

Gaz d'atomes fermioniques dans un piège harmonique ($\sim 1\text{h}20\text{mn}$)

Si le phénomène de condensation de Bose-Einstein dans les gaz dilués ultrafroids a été observé dès 1995 (Anderson *et al* Science **269**, 1995), ce n'est que quelques années après que l'effet de la dégénérescence quantique a pu être observé dans les gaz d'atomes fermioniques (De Marco & Jin, Science **285**, 1999).

Nous allons étudier un gaz de N atomes fermioniques, confinés dans un piège harmonique, ce qui correspond à la situation expérimentale. L'énergie d'un atome est $\varepsilon(\vec{r}, \vec{p}) = \frac{1}{2m}\vec{p}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2\vec{r}^2$ et la densité des états *individuels* est donnée par $\rho(\varepsilon) = \frac{1}{(\hbar\omega)^3}\varepsilon^2$ (en tenant compte de la dégénérescence de spin).

1/ Rappeler l'expression de la distribution de Fermi-Dirac $\bar{n}^F(\varepsilon)$ et son sens physique. En supposant le potentiel chimique $\mu > 0$, tracer soigneusement $\bar{n}^F(\varepsilon)$ en fonction de ε pour $T > 0$ (avec $k_B T \ll \mu$) et $T = 0$, sur un même graphe.

2/ En supposant T et μ fixés, exprimer le nombre de fermions N et l'énergie E du gaz sous la forme de deux intégrales.

On se place à la limite thermodynamique.

3/ **Énergie de Fermi.**— Dédire du 2/ une expression de N en fonction de μ pour $T = 0$. Rappeler la définition de l'énergie de Fermi ε_F et donner son expression en fonction de N et $\hbar\omega$.

4/ **Énergie du gaz.**— Dans l'expérience, De Marco *et al* ont tracé $E/(3Nk_B T)$ en fonction de T (cf. figure).

- Quelle est l'énergie du gaz dans le régime classique (utiliser un théorème du cours) ?
- Pour $T = 0$, déduire du 2/ une expression de E en fonction de μ . Dédire E/N en fonction de ε_F . Enfin, exprimer E en fonction de N et $\hbar\omega$.
- Quel est le comportement attendu pour $E/(3Nk_B T)$ dans la limite $T \rightarrow 0$? Cela correspond-il aux données de la figure ?

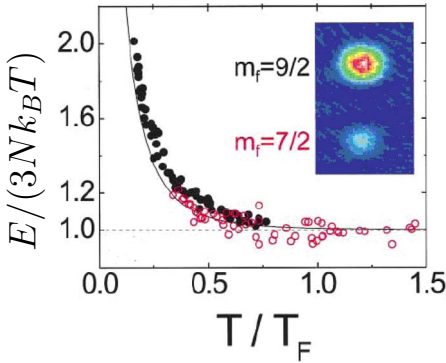


FIGURE 1 : Énergie E d'un gaz de N fermions dans un piège harmonique en fonction de la température (T_F est la température de Fermi). Tiré de : B. De Marco, S. B. Papp, and D. S. Jin, *Pauli blocking of collisions in a quantum degenerate atomic Fermi gas*, Physical Review Letters **86**, p. 5409 (2001).

5/ **Profil de densité du gaz.**— Dans cette dernière question, on étudie le profil de densité du gaz fermionique, en utilisant une approximation semiclassique (aussi appelée approximation de Thomas-Fermi).

a) En considérant l'expression intégrale de N du 2/ (en terme de $\bar{n}^F(\varepsilon)$ et $\rho(\varepsilon)$), justifier

$$N = 2 \int \frac{d^3\vec{r}d^3\vec{p}}{h^3} \bar{n}^F(\varepsilon(\vec{r}, \vec{p})) \quad (4)$$

Indication : utiliser la représentation de la densité d'états semiclassique $\rho(\varepsilon) = 2 \int \frac{d^3\vec{r}d^3\vec{p}}{h^3} \delta(\varepsilon - \varepsilon(\vec{r}, \vec{p}))$.

Cette expression montre que

$$f(\vec{r}, \vec{p}) = \frac{2}{h^3} \bar{n}^F(\varepsilon(\vec{r}, \vec{p})) \quad (5)$$

est la fonction de distribution dans l'espace des phases à un fermion, permettant de calculer le profil de densité du gaz $n(\vec{r}) = \int d^3\vec{p} f(\vec{r}, \vec{p})$.

b) **Régime classique.**— Justifier que le régime classique correspond à $e^{\beta\mu} \ll 1$. Que peut-on dire de $\bar{n}^F(\varepsilon)$ dans cette limite? Déduire la forme approchée de $f(\vec{r}, \vec{p})$ et l'allure du profil de densité $n(\vec{r})$.

c) **Gaz dégénéré.**— Rappeler l'expression de $\bar{n}^F(\varepsilon)$ à $T = 0$ et montrer que le profil de densité est donné par

$$n(\vec{r}) = \frac{8\pi}{3h^3} [2m(\varepsilon_F - V(\vec{r}))]^{3/2} \quad (6)$$

où le potentiel de confinement est ici $V(\vec{r}) = (1/2)m\omega^2\vec{r}^2$. On introduit R_F , défini par $\varepsilon_F = (1/2)m\omega^2 R_F^2$, qui donne la taille du gaz. Exprimer R_F en fonction de N et $\ell_\omega \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\hbar/(m\omega)}$. Montrer que la densité doublement intégrée $n^{(1)}(z) \stackrel{\text{def}}{=} \int dx dy n(\vec{r})$, mesurée expérimentalement, a la forme $n^{(1)}(z) \propto (R_F^2 - z^2)^{\theta_f}$ où θ_f est un exposant à déterminer. Tracer *soigneusement* l'allure de $n^{(1)}(z)$.

d) **Comparaison avec le gaz de bosons à $T = 0$.**— L'interaction répulsive entre atomes joue un rôle important dans le gaz de bosons à $T = 0$. Dans ce cas, le profil de densité a la forme $n(\vec{r}) = \frac{1}{g}[\mu - V(\vec{r})] \propto (R_B^2 - \vec{r}^2)$ avec $R_B \propto (gN)^{1/5}$ (et g la force de l'interaction qui contrôle notamment le potentiel chimique $\mu_{\text{bosons}} \propto (gN)^{2/5}$), d'où $n^{(1)}(z) \propto (R_B^2 - z^2)^2$. Comparer les différentes grandeurs avec celles correspondantes pour le gaz de fermions. Comment expliquer la similitude entre le gaz de bosons en *interactions répulsives* et le gaz de fermions *sans interaction*?

Se relire : 5mn !!

Annexe

- Volume de la sphère de rayon unité en dimension d : $\mathcal{V}_d = \pi^{d/2}/\Gamma(\frac{d}{2} + 1)$.
- Fonction Gamma-d'Euler : $\Gamma(z) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\infty dt t^{z-1} e^{-t}$ pour $\text{Re}(z) > 0$; $\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z)$; $\Gamma(n) = (n - 1)!$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.
- Formule de Stirling : $\ln n! \simeq n \ln n - n$ si $n \gg 1$.
- Une famille d'intégrales :

$$\Gamma(\alpha) \zeta(\alpha) = \int_0^\infty \frac{dt t^{\alpha-1}}{e^t - 1} \quad (7)$$

- Fonction Zeta : $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} \simeq 1.645$, $\zeta(3) \simeq 1.202$, $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90} \simeq 1.082$, etc
- Égalité fondamentale de la *thermodynamique* : $dE = T dS - p dV + \mu dN$.
- Constantes : $k_B = 1.38 \times 10^{-23}$ J/K; $|q_e| = 1.6 \times 10^{-19}$ C; $m_p = 1.67 \times 10^{-27}$ kg.

SOLUTIONS SUR LA PAGE DU COURS : CF. http://lptms.u-psud.fr/christophe_texier/