

Mathématiques pour la Physique II

TD 0 : Prérequis d'analyse



Le contenu de ce sujet doit être parfaitement maîtrisé



Si tel n'est pas le cas \Rightarrow À (RE)TRAVAILLER !

Exercice 1 : Dérivation

Pour des fonctions d'une variable réelle et à valeurs réelles de régularité suffisantes, on a

$$\frac{d}{dx}(\alpha f + \beta g) = \alpha f'(x) + \beta g'(x) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}f(g(x)) = g'(x)f'(g(x))$$

Fonction réciproque : Soit $f^{-1}(x)$ la fonction réciproque de f (i.e. $f^{-1}(f(x)) = x$). En supposant que $f'(x)$ est monotone, montrer que

$$\frac{d}{dx}f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \quad (1)$$

Application : en utilisant $(e^x)' = e^x$, retrouver la dérivée de $\ln(x)$ sur \mathbb{R}^+ .

Exercice 2 : Fonctions élémentaires

Par définition, on a

$$\exp(ix) = \cos x + i \sin x$$

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$\exp(x) = \cosh x + \sinh x$$

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$

Montrer les expressions suivantes

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\cosh(a+b) = \cosh a \cosh b + \sinh a \sinh b$$

$$\sinh(a+b) = \sinh a \cosh b + \sinh b \cosh a$$

$$\cosh(2x) = \cosh^2 x + \sinh^2 x$$

$$\sinh(2x) = 2 \sinh x \cosh x$$

$$\tanh(a+b) = \frac{\tanh a + \tanh b}{1 + \tanh a \tanh b}$$

Exercice 3 : Dérivées de fonctions usuelles

Vérifier :

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
x^n	nx^{n-1}	$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$e^{\lambda x}$	$\lambda e^{\lambda x}$	$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\ln x $	$\frac{1}{x}$	$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\sin x$	$\cos x$	$\sinh x$	$\cosh x$
$\cos x$	$-\sin x$	$\cosh x$	$\sinh x$
$\tan x$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\tanh x$	$1 - \tanh^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x}$

Exercice 4 : Développement limités

On rappelle la formule de Taylor pour une fonction réelle f de classe \mathcal{C}^n sur un voisinage de

$$x_0 \in \mathbb{R} : f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \mathcal{O}((x - x_0)^n).$$

Déduire les développements suivants (on note que $0! = 1$) :

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-x)^k$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + \dots \quad (\text{le d.l. s'arrête si } \alpha \in \mathbb{N})$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \dots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^5)$$

$$\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$$\sinh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\tanh(x) = x - \frac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^5)$$

Exercice 5 : Critères de convergence d'intégrales

Montrer les critères de convergence suivants :

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx \quad \text{pour } a > 0 ; \alpha \in \mathbb{R} \quad \text{est convergente pour } \alpha > 1$$

$$\int_0^a \frac{1}{x^\alpha} dx \quad \text{pour } a > 0 ; \alpha \in \mathbb{R} \quad \text{est convergente pour } \alpha < 1$$

$$\int_a^{+\infty} e^{\lambda x} dx \quad \text{pour } \lambda \in \mathbb{R} \quad (\text{resp. } \lambda \in \mathbb{C}) \quad \text{est convergente pour } \lambda < 0 \quad (\text{resp. } \operatorname{Re}(\lambda) < 0)$$

$$\int_{-\infty}^a e^{\lambda x} dx \quad \text{pour } \lambda \in \mathbb{R} \quad (\text{resp. } \lambda \in \mathbb{C}) \quad \text{est convergente pour } \lambda > 0 \quad (\text{resp. } \operatorname{Re}(\lambda) > 0)$$

Exercice 6 : Intégration par parties

1 – Montrer la formule d'intégration par parties

$$\int_a^b u(x) v'(x) dx = \left[u(x) v(x) \right]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b u'(x) v(x) dx$$

2 – En déduire que la limite suivante existe

$$\lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow +\infty}} \int_a^b \frac{\sin t}{t} dt$$

3 – Montrer que $F(x) = x \log x - x$ est une primitive de $f(x) = \log x$ soit en dérivant $F(x)$ soit en procédant par intégration par parties.