

Mathématiques pour la Physique II

**TD 9 : Distribution de Dirac**

**Exercice 1 : Introduction - Définition de la distribution de Dirac**

1 – On introduit la fonction

$$\delta_\varepsilon(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\varepsilon/\pi}{x^2 + \varepsilon^2}. \quad (1)$$

- a) Tracer la soigneusement.
- b) Analyser  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \delta_\varepsilon(x)$  pour  $x \neq 0$  et pour  $x = 0$ .
- c) Soit  $\varphi(x)$  une fonction continue à l'origine. Calculer

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}} dx \delta_\varepsilon(x) \varphi(x). \quad (2)$$

On supposera également que  $\varphi$  décroît « vite » à l'infini, afin que l'intégrale soit absolument convergente.

- d) Calculer la dérivée  $\delta'_\varepsilon(x)$ . La tracer *soigneusement*. Calculer

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}} dx \delta'_\varepsilon(x) \varphi(x). \quad (3)$$

- e) Même question avec  $\delta''_\varepsilon(x)$ .
- f) Donner la transformée de Fourier  $\hat{\delta}_\varepsilon(k)$  (cf. TD précédent). La tracer et discuter la limite  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ . Quelle forme prend la représentation  $\delta_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} \hat{\delta}_\varepsilon(k) e^{ikx}$  dans cette limite ?
- g) Que vaut  $\mathcal{F}_k[\delta_\varepsilon^{(n)}(x)]$  ? Discuter la limite  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ .

2 – Aurions nous pu baser la discussion sur les fonctions suivantes ?

$$\begin{aligned} \Pi_\varepsilon(x) &= \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} & \text{pour } |x| < \varepsilon/2 \\ 0 & \text{pour } |x| > \varepsilon/2 \end{cases}, & T_\varepsilon(x) &= \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} \left(1 - \frac{|x|}{\varepsilon}\right) & \text{pour } |x| < \varepsilon \\ 0 & \text{pour } |x| > \varepsilon \end{cases}, \\ \Phi_\varepsilon(x) &= \frac{1}{\pi\varepsilon} \operatorname{sinc}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), & \Psi_\varepsilon(x) &= \frac{1}{\pi\varepsilon} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), & \Upsilon_\varepsilon(x) &= \frac{1}{2\varepsilon} \exp\left(-\frac{|x|}{\varepsilon}\right), \\ g_\varepsilon(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\varepsilon} e^{-\frac{1}{2}(x/\varepsilon)^2}. \end{aligned}$$

La distribution de Dirac peut être vue comme la limite de  $\delta_\varepsilon(x)$  pour  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ . Dans les exercices qui suivent, on utilisera la relation fondamentale :

$$\int_{\mathbb{R}} dx \delta(x) \varphi(x) = \varphi(0) \quad (4)$$

où  $\varphi$  est une fonction continue en 0.

### Exercice 2 : Intégrales avec $\delta$

Calculer les intégrales suivantes

$$\int_{\mathbb{R}} dx \delta(ax + b) x^2 \quad \text{avec } a > 0$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{x} \delta(R - \|\vec{x}\|)$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3 \vec{x} \delta(R^2 - \vec{x}^2)$$

$$\int_{\mathbb{R}} dk \int_0^{\infty} dx x e^{-x} \cos(k(x^2 - \lambda))$$

$$\int_{\mathbb{R}} dx \delta(\sin(\pi x)) \frac{\pi}{x^2 + a^2}$$

$$\int_{\mathbb{R}} dp \delta(x^2 + p^2 - E)$$

### Exercice 3 : Densités d'états quantiques pour des particules libres

La distribution de Dirac est très utile pour calculer des **densités**. Par exemple, si l'on considère un problème quantique, caractérisé par un spectre des énergies  $\{\varepsilon_n\}$ , le concept de « densité d'états », définie comme  $\rho(\varepsilon) = \sum_n \delta(\varepsilon - \varepsilon_n)$ , est très utile.

1 – Soit  $I = [E_1, E_2]$  un intervalle. Que représente  $\int_I d\varepsilon \rho(\varepsilon)$  ?

2 – On considère des particules libres ultrarelativistes. Les états quantiques libres sont des ondes planes  $|\phi_{\vec{k}}\rangle$ , d'énergie  $\varepsilon_{\vec{k}} = \hbar c \|\vec{k}\|$ . Calculer la densité des états quantiques par unité de volume en dimension  $d$  (pour  $\hbar c = 1$ )

$$\rho(\varepsilon) = \int \frac{d^d \vec{k}}{(2\pi)^d} \delta(\varepsilon - \|\vec{k}\|) \quad (5)$$

Indication : la surface d'une sphère de rayon unité en dimension  $d$  est  $S_d = 2\pi^d / \Gamma(d/2)$ .

3 – Même question pour des particules non relativistes avec  $\varepsilon_{\vec{k}} = \frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2m}$  (en faisant  $\hbar^2 / (2m) = 1$ ) :

$$\rho(\varepsilon) = \int \frac{d^d \vec{k}}{(2\pi)^d} \delta(\varepsilon - \vec{k}^2) \quad (6)$$

### Exercice 4 : Normalisation des ondes planes sur $\mathbb{R}^+$ en MQ

On considère l'équation de Schrödinger libre sur  $\mathbb{R}^+$ , avec condition de Dirichlet à l'origine. Une base de fonctions est

$$\phi_k(x) = C \sin(kx) \quad \text{pour } k > 0. \quad (7)$$

1 – Calculer la constante  $C$  assurant la condition d'orthonormalisation des ondes planes

$$\int_0^\infty dx \phi_k(x) \phi_{k'}(x) = \delta(k - k') \quad (8)$$

2 – On souhaite maintenant indiquer les ondes planes à l'aide de l'énergie  $E = k^2$ . On les note alors  $\psi_E(x) = B \sin(\sqrt{E}x)$ . Calculer la nouvelle constante de normalisation assurant la condition

$$\int_0^\infty dx \psi_E(x) \psi_{E'}(x) = \delta(E - E'). \quad (9)$$

### Exercice 5 : Distribution de la position d'un oscillateur 1D en mécanique statistique

On considère une particule en une dimension, soumise à un potentiel  $V(x)$  **confinant** (i.e. t.q.  $V(x) \rightarrow +\infty$  pour  $x \rightarrow \pm\infty$ ). Le postulat fondamental de la physique statistique nous dit que la distribution microcanonique  $\rho^*$  est uniforme dans l'espace des phases, i.e. la loi jointe de la position et de l'impulsion est

$$\rho^*(x, p) = C \delta(p^2 + V(x) - E) \quad (10)$$

1 – Dédurre la distribution de la position

$$w(x) = \int dp \rho^*(x, p), \quad (11)$$

à une normalisation près.

### Exercice 6 : Distribution de Dirac $\delta$ et fonction de Heaviside $\theta_H$

1 – On définit la fonction

$$\theta_\varepsilon(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{x}{\varepsilon}\right). \quad (12)$$

- Tracer soigneusement  $\theta_\varepsilon(x)$ .
- Calculer  $\theta'_\varepsilon(x)$ .
- Discuter la limite  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  pour les deux fonctions.
- Préciser quelle est la valeur de  $\theta_\varepsilon(0)$ .

2 – On donne un autre éclairage sur la relation précédente. La fonction de Heaviside est définie comme

$$\theta_H(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour } x > 0 \\ 0 & \text{pour } x < 0 \end{cases} \quad (13)$$

Discuter la valeur de l'intégrale  $\int_{-\infty}^x dt \delta(t)$  en fonction de  $x$ . Dédurre la relation entre  $\theta_H(x)$  et  $\delta(x)$ .

3 – Applications :

- La fonction indicatrice d'un ensemble  $A \subset \mathbb{R}$  est  $\chi_A(x) = 1$  pour  $x \in A$  et  $\chi_A(x) = 0$  pour  $x \notin A$ . Calculer la dérivée de la fonction indicatrice d'un intervalle,  $\chi_{[a,b]}(x)$ .

b) En exprimant la fonction  $\text{sign}(x)$  en fonction de  $\theta_H(x)$ , donner sa dérivée.

c) Dédurre  $\frac{d^2}{dx^2}|x - x_0|$  et  $\frac{d^2}{dx^2}\max(x, x_0)$ .

4 – On considère la fonction  $\Pi_\varepsilon(x)$  définie dans le premier exercice (et un TD précédent). Calculer  $\Pi'_\varepsilon(x)$ . Soit  $\varphi$  une fonction continue, exprimer  $\int_{\mathbb{R}} dx \Pi'_\varepsilon(x) \varphi(x)$  puis discuter la limite  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  (faire d'abord l'intégration puis prendre la limite).

5 – Discutons des applications de la relation entre  $\theta_H$  et  $\delta$ . on considère l'équation différentielle

$$\left(\frac{d}{dx} + \lambda\right) y(x) = \delta(x). \quad (14)$$

Vérifier que  $y(x) = \theta_H(x) e^{-\lambda x}$  est solution.

Facultatif : En supposant que  $\lambda > 0$ , résoudre l'équation différentielle à l'aide de la transformation de Fourier. Et pour  $\lambda < 0$  ?

6 – On considère maintenant l'équation différentielle

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2\right) G(t) = \delta(t). \quad (15)$$

Montrer que  $G_R(t) = \theta_H(t) \frac{1}{\omega} \sin(\omega t)$  est solution. Vérifier que  $G_F(t) = \frac{1}{2i\omega} \exp\{i\omega|t|\}$  est aussi solution.

### Exercice 7 : Changement de variable dans une distribution et générateurs de nombres aléatoires

Considérons une variable aléatoire  $X$  distribuée selon la loi  $p(x)$ . Nous notons  $\langle \dots \rangle_X$  la moyenne sur la variable aléatoire.

1 – Justifier que l'on peut écrire  $p(x) = \langle \delta(x - X) \rangle_X$ .

2 – Soit  $f$  une fonction monotone. Utiliser la remarque précédente pour relier  $p(x)$  à la distribution  $q(y)$  de la variable aléatoire  $Y = f(X)$ .

3 – Application : générateurs de nombres aléatoires

a) soit  $X$  une variable distribuée uniformément sur l'intervalle  $[0, 1]$ . Quelle est la distribution de la variable  $Y = -\ln X$  ?

b) On considère deux variables gaussiennes identiques et indépendantes,  $X$  et  $Y$ , distribuées selon la loi jointe

$$P(x, y) = \frac{1}{\pi} \exp\{-x^2 - y^2\}. \quad (16)$$

Quelle est la distribution de  $Z = X^2 + Y^2$  ? Quelle est la distribution de l'angle  $\theta$  définissant la direction du vecteur  $X\vec{u}_x + Y\vec{u}_y$  ?

Sachant qu'un ordinateur fournit des nombres aléatoires uniformément distribués sur  $[0, 1]$ , déduire une manière de programmer un générateur de nombres aléatoires gaussiens.

### Exercice 8 : Fonctions de Green

1 – Bille dans un fluide soumise à une force oscillante.— On étudie l'équation différentielle

$$\ddot{x}(t) + \frac{1}{\tau} \dot{x}(t) = \frac{F_\omega}{m} \cos(\omega t), \quad (17)$$

où  $1/\tau$  est relié au coefficient de viscosité.

- a) Donner l'équation pour la fonction de Green  $G(t)$  associée à l'équation différentielle (pour la vitesse).
- b) Calculer  $G(t)$ .
- c) Dédire la solution de l'équation différentielle (17) (en régime permanent).

## 2 – Oscillateur électrique

- a) On soumet un oscillateur électrique (circuit LC) à une impulsion électrique exponentielle :

$$\ddot{Q}(t) + \frac{1}{LC} Q(t) = \frac{U(t)}{L} \quad \text{avec } U(t) = \theta_H(t) U_0 e^{-\lambda t} \quad (18)$$

La fonction de Green « retardée » a été donnée plus haut :  $G(t) = \theta_H(t) \frac{1}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)$ .

Exprimer  $\omega_0$  en fonction de  $L$  et  $C$ . Dédire la solution  $Q(t)$  nulle pour  $t < 0$ .

- b) **Facultatif : Effet de la dissipation.** – On étudie maintenant le circuit RLC en ajoutant un terme  $(R/L) \dot{Q}(t)$  à l'équation précédente. On pose  $2/\tau = R/L$ . Écrire la nouvelle équation pour la fonction de Green et la résoudre en utilisant l'analyse de Fourier. Étudier la fonction de Green dans la limite  $\tau\omega_0 \gg 1$ .

## Exercice 9 : Distribution de Dirac dans $\mathbb{R}^d$ et fonction de Green du Laplacien

On définit la distribution de Dirac dans  $\mathbb{R}^3$  comme

$$\delta(\vec{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \delta(x)\delta(y)\delta(z) \quad (19)$$

- 1 – Calculer

$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{x} \delta(\vec{x}). \quad (20)$$

- 2 – Reprendre l'exercice du TD précédent sur le potentiel de Yukawa et réinterpréter le résultat pour donner la fonction de Green de l'équation  $[-\Delta + \kappa^2]G_\kappa(\vec{x}) = \delta(\vec{x})$ . Dédire la fonction de Green du Laplacien  $G_0(\vec{x})$ .

- 3 – Écrire la solution de l'équation de Poisson (dans le système CGS)

$$\Delta V(\vec{x}) = -4\pi \rho(\vec{x}) \quad (21)$$

pour une densité de charge  $\rho(\vec{x})$  quelconque à l'aide de  $G_0(\vec{x})$ .