Université Paris-Saclay
L3 PAPP
Christophe Texier

TD 9 - Distribution de Dirac

On définit

$$\delta_\epsilon(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\epsilon/\pi}{x^2+\epsilon^2} \,. \tag{1}$$

qui est une fonction centrée sur l'origine, de largeur $\sim \epsilon$ et de hauteur $\sim 1/\epsilon$ de telle sorte que $\int_{\mathbb{R}} dx\, \delta_\epsilon(x) = 1$.

Soit $\varphi(x)$ une fonction régulière à l'origine. Il est alors facile de se convaincre que

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{-A}^{+A} dx\, \delta_\epsilon(x)\, \varphi(x) = \varphi(0) \tag{2}$$

où $A > 0$. Cette identité est évidente si l'on trace l'intégrande, qui est de plus en concentrée autour de l'origine.

Tout l'objet de la théorie des distributions est de se convaincre qu'on peut donner un sens à

$$\delta(x) = \lim_{\epsilon\to 0^+} \delta_\epsilon(x) \tag{3}$$

sans l'intégrale (les mathématiciens ont besoin de s'en convaincre... les physiciens sont convaincus !).

On retiendra la relation fondamentale :

$$\int_{\mathbb{R}} dx\, \delta(x)\, \varphi(x) = \varphi(0) \tag{4}$$

où φ est une fonction continue en 0.

Tout le reste en découle.

Exercice 1

exercice de cours. Cf. notes de cours sur http://lptms.u-psud.fr/christophe_texier/enseignements/enseignement-en-licence/l3-papp-mathematiques/

Exercice 2 : Intégrales avec δ

On montre comment on calcule des intégrales avec un Dirac... Le mieux est d'abord d'avoir étudié les propriétés de δ dans le cours (mais pas absolument indispensable, cela donne du recul et les exercices qui suivent apparaissent moins comme l'utilisation d'astuces, mais de propriétés générale de δ).

1/ Si $a > 0$

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\, \delta(ax+b)\, x^2 = \frac{1}{a}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}y\, \delta(y)\, \left(\frac{y-b}{a}\right)^2 = \frac{b^2}{a^3} \tag{5}$$

De manière alternative, on utilise les propriétés $\delta(ax+b) = \frac{1}{a}\delta(x+b/a)$ puis $\int \mathrm{d}x\, \delta(x-c)\, f(x) = f(c)$

2/ Pour la suivante, on passe en coordonnées sphériques

$$\int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\vec{x}\, \delta(R - ||\vec{x}||) = 4\pi \int_0^\infty \mathrm{d}r\, r^2\, \delta(R - r) = 4\pi R^2 \tag{6}$$

C'est donc une manière d'écrire la surface de la sphère.

3/ Un peu plus subtil, mais sur le même principe...

$$\int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\vec{x}\, \delta(R^2 - \vec{x}^{\,2}) = 4\pi \int_0^\infty \mathrm{d}r\, r^2\, \delta(R^2 - r^2) = 2\pi \int_0^\infty \mathrm{d}y \sqrt{y}\, \delta(R^2 - y) = 2\pi R \tag{7}$$

4/

$$I = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}k \int_0^\infty \mathrm{d}x\, x\, e^{-x}\, \cos(k(x^2 - \lambda)) = ? \tag{8}$$

L'astuce est ici d'intégrer d'abord sur k en utilisant la relation remarquable et importante (cf. cours)

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}k}{2\pi}\, e^{ikx} = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}k}{\pi}\, \cos(kx) = \delta(x)} \tag{9}$$

d'où

$$I = 2\pi \int_0^\infty \mathrm{d}x\, x\, e^{-x}\, \delta(x^2 - \lambda) = \pi \int_0^\infty \mathrm{d}y\, e^{-\sqrt{y}}\, \delta(y - \lambda) = \pi\, e^{-\sqrt{\lambda}} \tag{10}$$

fastoche ! Pourtant on ne l'aurait pas deviné à première vue...

5/

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\, \delta(\sin(\pi x))\, \frac{\pi}{x^2 + a^2} = ? \tag{11}$$

Un peu plus difficile... remarquons que $\sin(\pi x) \simeq (-1)^n \pi (x - n\pi)$ pour $x \sim n\pi$. D'où une autre jolie relation

$$\delta(\sin(\pi x)) = \frac{1}{\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(x - n) \tag{12}$$

(on a utilisé que $\delta(x)$ est paire). Finalement

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\, \delta(\sin(\pi x))\, \frac{\pi}{x^2 + a^2} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{n^2 + a^2} \tag{13}$$

C'est la série que l'on a calculée au TD8... qui vaut $\frac{\pi}{a} \coth(\pi a)$.

6/ La dernière est un petit exercice académique mais intéressant pour la physique statistique. La « distribution microcanonique » pour un oscillateur harmonique 1D est la distribution uniforme dans l'espace des phases sur les microétats d'énergie $H(x,p) = E$:

$$\rho(x,p) = C\, \delta(x^2 + p^2 - E) \tag{14}$$

où C est une normalisation. $\rho(x,p)$ est la densité de probabilité pour trouver la particule en x avec une impulsion p. Le calcul de la normalisation est similaire à l'exercice ci-dessus :

$$1/C = \int \mathrm{d}x \mathrm{d}p\, \delta(x^2 + p^2 - E) = 2\pi \int_0^\infty \mathrm{d}r\, r\, \delta(r^2 - E) = \pi \int_0^\infty \mathrm{d}y\, \delta(y - E) = \pi \tag{15}$$

Maintenant on veut déterminer la distribution de la position de l'oscillateur

$$w(x) = \int \mathrm{d}p\, \rho(x,p) = \int \frac{\mathrm{d}p}{\pi}\, \delta(x^2 + p^2 - E) = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}p}{2\pi}\, \delta(x^2 + p^2 - E) = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}y}{\pi\sqrt{y}}\, \delta(x^2 + y - E) \tag{16}$$

Finalement on obtient

$$w(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{E - x^2}} \qquad \text{pour } |x| < \sqrt{E} \tag{17}$$

La particule a une probabilité plus faible de se trouver en $x \sim 0$ où elle passe avec une grand vitesse ($E_p = 0$ et $E_c = E$ en $x = 0$). En revanche elle ralentit sur les bords en $\pm\sqrt{E}$, d'où la divergence de la densité de proba.

Excercices n avec $n > 2$

Cf. les applications dans les notes de cours sur `http://lptms.u-psud.fr/christophe_texier/enseignements/enseignement-en-licence/l3-papp-mathematiques/`