Université Paris Sud-11

13 Décembre 2011 S3PMCP Partiel de Physique Ondes Scalaires
durée 3h, les documents ne sont pas autorisés.

Diffraction à l'infini d'ondes scalaires

L'amplitude complexe F décrivant le processus de diffraction à l'infini par une ouverture dans un écran, d'une onde monochromatique incidente, dont l'amplitude sur l'écran vaut $A(M)$, de pulsation $\omega = kc = \frac{2\pi c}{\lambda}$, est donnée par:

$$F = F(k, \vec{u}) = \int\int_{P \in S} k\, A(P)\, e^{i\varphi(P)} dS(P)$$

avec $\varphi(P)$ donné par: $\varphi(P) = -\,\overrightarrow{OP}.\vec{k}$ où O est un point de référence sur la surface de l'écran, S représente l'ouverture dans l'écran. Si $\vec{k}_i$ est un des vecteurs d'onde incident et $\vec{k}$ le vecteur d'onde dans la direction diffractée. On a $\left\|\vec{k}_i\right\| = \left\|\vec{k}\right\| = k$, c'est à dire que seule change la direction du vecteur d'onde son module reste constant. On étudiera l'onde diffractée dans le plan $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_z)$ où le vecteur diffracté $\vec{k}$ est donné par $\vec{k} = k\vec{u} = k(\sin\theta\, \vec{u}_x + \cos\theta\, \vec{u}_z)$ où $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$. L'ouverture qui est contenue dans le plan $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$, le point P est repéré par $\overrightarrow{OP} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y$. On mettra en évidence lorsque c'est possible la fonction $\frac{\sin u}{u}$dont les propriétés à retenir sont:

$$(1)\ \lim_{u\to 0} \frac{\sin u}{u} = 1 \text{ et } (2)\ \lim_{\eta\to\infty} \frac{\sin \eta u}{\eta u} = \begin{cases} 0 \text{ si } u \neq 0 \\ 1 \text{ si } u = 0 \end{cases}.$$

On va examiner les ondes pour lesquelles le signal de diffraction correspond à l'intensité de l'onde soit $E = |F|^2$.La fente est centrée au point O de coordonnées $(0, 0, 0)$ et a pour extension $-\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}$ et $-\frac{b}{2} \leq y \leq \frac{b}{2}$.On posera $S_0 = kab$

1. Dans le premier cas étudié, l'onde incidente cident $\vec{k}_i = \vec{k}_0 = k\vec{u}_0 = k\,\vec{u}_z$, ce qui correspond à une incidence normale à l'ouverture.
   (a) Que vaut $A(P)$ dans le cas présent?
   (b) Calculez $\varphi(P)$, déduisez-en l'expression de $F(\theta)$. Calculez $E(\theta)$.
2. Dans ce second cas, l'onde incidente est la même que précedemment, mais une seconde fente identique à la première est ajoutée dont le centre est situé en $x = r, y = 0$.
   (a) Que devient l'expression de $F(\theta)$, on la notera $F_2(\theta)$?
   (b) Que devient l'expression de $E(\theta)$, on la notera $E_2(\theta)$?
   (c) Tracez figurativement ce que vous observez sur un écran à l'infini, (par exmple: $a = 1$, $r = 2$ et $k = 8\pi$).
3. Ecran complémentaire d'une fente:
   (a) Que devient $E_2(\theta)$ quand $r - a = c$? Donnez l'expression en fonction de r et c.
   (b) Que devient $E_2(\theta)/4S_0^2$ à la limite $r- > \infty$? Tracez par exemple avec $c = 1$, $r = 10$ et $k = 8\pi$
   (c) En quoi ce résultat est-il surprenant? Qu'arrive t il à l'onde incidente? C'est l'expérience de Fresnel Arago.
4. Dans le troisième cas étudié $A(P) = \cos(\alpha x + \beta)$.
   (a) Déterminez $F(\theta)$, laissez l'expression sous forme d'une somme de $\frac{\sin u}{u}$, n'essayez surtout pas de la simplifier plus.
   (b) On se place dans le cas où $\alpha = 0$ et $\beta = 0$.
      1. Donnez l'expession de $F(\theta)$ correspondant à ces valeurs. Que vaut $F(0)$?

2. Calculez $E(\theta)$. Que vaut $E(0)$?
3. Pour $a = 1$ et $k = 8\pi$, tracez sur la même figure $F(\theta)$, $E(\theta)$ et la courbe $k \sin\theta \, a/10\pi = p/10$ indiquant la position des maxima et des minima, à une double exception près, laquelle?
4. On définit la largeur angulaire Δ de la tache de diffraction par la distance entre les deux premiers minima de $E(\theta)$ (autour de la valeur maximale θ_0). Donnez son expression à partir de θ, (supposé petit en radians) en fonction de λ et de a.

(c) On se place dans le cas où $\alpha = \pi/a$ et $\beta = 0$. On notera F par F_1 et E par E_1

1. Donnez, sans chercher à trop les simplifier, les expressions de $F_1(\theta)$ et de $E_1(\theta)$.
2. Que valent $F_1(0)$ et $E_1(0)$?
3. Sur une même figure, pour $a = 1$ et $k = 8\pi$, tracez $E_1(\theta)/E_1(0)$, $E(\theta)$ et la courbe $k \sin\theta \, a/10\pi = p/10$.
4. Donnez l'expression de la largeur angulaire Δ_1 de la tache de diffraction ,.en fonction de λ et de a.
5. Quels sont les avantages et inconvénients de l'emploi du cas (b) ou du cas (c)? Pourquoi parle -t-on d'apodisation dans le cas (c)?