# Réseau à échelettes

1. $z = z_n - (x - x_n)\tan\alpha$

2. D'après l'énoncé

$$\vec{k_i} = k\,(\sin\alpha\;\vec{u_x} + \cos\alpha\;\vec{u_z})$$

$$\vec{k_e} = k\,(\sin(\alpha+\theta)\,\vec{u_x} + \cos(\alpha+\theta)\,\vec{u_z})$$

$$\varphi(P) = \vec{OP}\cdot(\vec{k_i} + \vec{k_e})$$

$$= k\left[x(\sin\alpha + \sin(\theta+\alpha)) + z(\cos\alpha + \cos(\theta+\alpha))\right]$$

On veut faire apparaître $z_n$ et $x - x_n$. On utilise la question 1 :

$$\frac{\varphi(P)}{k} = x_n(\sin\alpha + \sin(\theta+\alpha)) + z_n(\cos\alpha + \cos(\theta+\alpha))$$
$$+ (x - x_n)\underbrace{\left[(\sin\alpha + \sin(\theta+\alpha)) - \tan\alpha\,(\cos\alpha + \cos(\theta+\alpha))\right]}_{I}$$

$$I = \frac{1}{\cos\alpha}\left[\cos\alpha\,(\sin\alpha + \sin(\theta+\alpha)) - \sin\alpha\,(\cos\alpha + \cos(\theta+\alpha))\right]$$

$$= \frac{1}{\cos\alpha}\left[\cancel{\sin\alpha\cos\alpha} - \cancel{\sin\alpha\cos\alpha} + \cos\alpha\sin(\theta+\alpha) - \sin\alpha\cos(\theta+\alpha)\right]$$

or $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$

donc $$\boxed{I = \frac{1}{\cos\alpha}\sin(\theta+\alpha-\alpha) = \frac{\sin\theta}{\cos\alpha}}$$

et $$\boxed{\varphi(P) = k\left[(x-x_n)\frac{\sin\theta}{\cos\alpha} + x_n(\sin\alpha + \sin(\theta+\alpha)) + z_n(\cos\alpha + \cos(\theta+\alpha))\right]}$$

Par la suite on note $X = x - x_n$

3. $$F = \iint_{P \in \text{bande}} dS(P) \; k \, e^{i\varphi(P)}$$

Sur la bande, $y \in \left[-\frac{d}{2}, \frac{d}{2}\right]$, et $X \in [-a, a]$ (d'après la figure) donc

$$F = \int_{-d/2}^{d/2} dy \int_{-a}^{a} dX \quad k \, e^{ikX \frac{\sin\theta}{\cos\alpha}} \cdot \underbrace{e^{ik\left(x_n(\sin\alpha + \sin(\alpha+\theta)) + z_n(\cos\alpha + \cos(\alpha+\theta))\right)}}_{\text{constant sur une bande}}$$

4. soit $\tilde{X} = \dfrac{X}{\cos\alpha} = \dfrac{bX}{a}$ (car $\cos\alpha = \frac{2a}{2b}$ d'après la figure)

$$F = kd \, e^{ik\left[x_n(\sin\alpha + \sin(\alpha+\theta)) + z_n(\cos\alpha + \cos(\alpha+\theta))\right]} \int_{-b}^{b} d\tilde{X} \; e^{ik\tilde{X}\sin\theta}$$

$$= kd \, e^{i\phi_n} \left[\frac{e^{ik\tilde{X}\sin\theta}}{ik\sin\theta}\right]_{\tilde{X}=-b}^{\tilde{X}=b}$$

$$= \frac{kd}{2} e^{i\phi_n} \frac{\sin(kb\sin\theta)}{k\sin\theta}$$

$$\boxed{F = \frac{S_0}{2} e^{i\phi_n} \frac{\sin(k\,b\sin\theta)}{k\,b\sin\theta}}$$

avec $S_0 = kdb$ et $\phi_n = \left[x_n(\sin\alpha + \sin(\alpha+\theta)) + z_n(\cos\alpha + \cos(\alpha+\theta))\right]k$

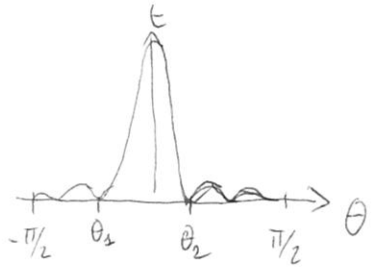
5. $$\boxed{E = F\bar{F} = \left[\frac{S_0}{2} \frac{\sin(kb\sin\theta)}{kb\sin\theta}\right]^2}$$

La diffraction d'une bande seule ne dépend pas du tout de $\alpha$

$E$ est maximale pour $\sin\theta = 0$ soit $\theta = 0$ puisque physiquement on a forcément que $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (sinon on traverse le miroir)

Pour $\theta = 0$ les rayons réfléchis par toute la bande sont en phase : $\varphi(P)$ constant

6.




Les minima sont donnés par

$$\sin(kb\sin\theta) = 0$$

$$\iff kb\sin\theta = p\pi \quad \text{avec } p \in \mathbb{Z} \text{ et } p \neq 0$$

7. Premier minimum à gauche : $kb\sin\theta_1 = -\pi$

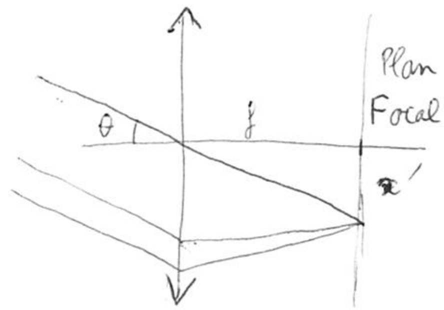
$k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ donc $\sin\theta_1 = -\dfrac{\lambda}{2b} \ll 1$ car $\lambda \sim$ nm

$$\sin\theta_1 \simeq \theta_1 \simeq \frac{-\lambda}{2b}$$

Pareil à droite $\theta_2 \simeq \dfrac{\lambda}{2b}$

Donc la tâche a une largeur angulaire $\theta_2 - \theta_1 \simeq \dfrac{\lambda}{b}$

8.




Si les rayons arrivent avec un angle $\theta \ll 1$ par rapport à l'axe optique, ils convergent au point du plan focal de coordonnée $x'$ avec $x' = f\tan\theta$

Si $\theta \ll 1$, $\boxed{x' \simeq f\theta}$ comme demandé.

Il faut donc que l'axe optique de la lentille soit dans la direction du rayon incident pour que les rayons réfléchis convergent en ce point.

On a donc $\theta \simeq \dfrac{x'}{f}$ et $kb\sin\theta \simeq \dfrac{kbx'}{f} = \dfrac{2\pi bx'}{\lambda f} = \dfrac{2\pi x'}{I}$

$$\boxed{E = \left[\frac{S_0}{\mathcal{I}} \frac{\sin\left(\frac{2\pi x'}{I}\right)}{\frac{2\pi x'}{I}}\right]^2}$$

avec $I = \dfrac{\lambda f}{b}$

9. $\Psi_{(n,m)} = \overrightarrow{OA_n}\,(\vec{k_i}+\vec{k_e}) - \overrightarrow{OA_m}\,(\vec{k_i}+\vec{k_e})$

$$= \overrightarrow{A_m A_n}\,(\vec{k_i}+\vec{k_e})$$

10. On a trouvé précédemment (question 4) pour la bande $n$

$$F_n = \frac{S_0}{2} e^{i\phi_n} \frac{\sin(kb\sin\theta)}{kb\sin\theta}$$

$\phi_n$ est la phase sur la bande $n$ $\quad \overrightarrow{OA_n}\,(\vec{k_i}+\vec{k_e})$

donc $\Psi = \phi_{n+1} - \phi_n$

$$\frac{\Psi}{k} = (x_{n+1}-x_n)\left(\sin\alpha + \sin(\alpha+\theta)\right) + (z_{n+1}-z_n)\left(\cos\alpha + \cos(\alpha+\theta)\right)$$

Or $x_n = (2n-1)a$ et $z_n = b\sin\alpha$

donc $x_{n+1} - x_n = 2a$ et $z_{n+1} - z_n = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\Psi = 2ak\left(\sin\alpha + \sin(\alpha+\theta)\right)}$$

11. Si $\theta \ll \alpha$, $\quad \Psi \simeq 4ak\sin\alpha$

$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$ or $\cos\alpha = \frac{a}{b}$ donc $\Psi \simeq 4ak\sqrt{1-\frac{a^2}{b^2}}$

ou alors $\Psi \simeq 4bk\sin\alpha\cos\alpha = 2bk\sin(2\alpha)$

12. $F_N = \sum_{n=1}^{N} F_n = \frac{S_0}{2}\frac{\sin(kb\sin\theta)}{kb\sin\theta} e^{i\phi_1} \sum_{n=0}^{N-1} \left(e^{i\Psi}\right)^n$

$$\boxed{F_N = \frac{S_0}{2} e^{i\left(\phi_1 + \frac{\Psi}{2}(N-1)\right)} \frac{\sin(kb\sin\theta)}{kb\sin\theta} \frac{\sin\left(kaN\left(\sin\alpha + \sin(\alpha+\theta)\right)\right)}{\sin\left(ka\left(\sin\alpha + \sin(\alpha+\theta)\right)\right)}}$$

13. $E_N = F_N \overline{F_N}$

$$= \left[ \underbrace{\frac{S_0}{2} \frac{\sin(kb\sin\theta)}{kb\sin\theta}} \quad \underbrace{\frac{\sin\left[kaN\left(\sin\alpha + \sin(\alpha+\theta)\right)\right]}{\sin\left[ka\left(\sin\alpha+\sin(\alpha+\theta)\right)\right]}} \right]^2$$

14 $E_N = \quad E(k,\theta) \quad . \quad R_N(k,\theta)$

15 $E(k,\theta)$ a des minima pour $kb\sin\theta = p\pi$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $p \neq 0$

et des maxima pour $kb\sin\theta = \pm\left(\frac{\pi}{2} + p\pi\right)$ avec $p \in \mathbb{N}$ et $p \geq 1$

ou $\sin\theta = 0$

$R_N(k,\theta)$ a des maxima principaux quand

$$\sin\left[ka\left(\sin\alpha + \sin(\alpha+\theta)\right)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad ka\left(\sin\alpha + \sin(\alpha+\theta)\right) = p\pi \quad \text{avec } p \in \mathbb{Z}$$

17. $\varphi = 0 \quad \Leftrightarrow \quad ka\left(\sin\alpha + \sin(\alpha+\theta)\right) = 0$

Si $\alpha \ll 1$ et $\theta \ll 1$

$$ka\,(2\alpha + \theta) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\theta = -2\alpha}$$

18 Si $\alpha \ll 1$ et $\theta \ll 1$

$$E_N = \left[ \frac{S_0}{2} \frac{\sin(kb\theta)}{kb\theta} \frac{\sin\left[kaN(2\alpha+\theta)\right]}{\sin\left[ka(2\alpha+\theta)\right]} \right]^2$$

$\cos\alpha = \frac{a}{b} \approx 1$ donc si $\alpha = \frac{\lambda}{2b}$ alors $ka \cdot 2\alpha = 2\pi$

et $\boxed{E_N = \left[\frac{S_0}{2} \frac{\sin(kb\theta)}{kb\theta} \frac{\sin(kbN\theta)}{\sin(kb\theta)}\right]^2 = \left[\frac{S_0 N}{2} \frac{\sin(kbN\theta)}{kbN\theta}\right]^2}$

On voit donc l'équivalent d'une ~~diffraction~~ diffraction avec un angle $N\theta$ soit l'ordre $N$ de la diffraction d'une seule bande.

19. Si on éclaire ce réseau par un faisceau de lumière blanche, les différentes longueurs d'onde (et donc les différents $k$) ont des minima et des maxima de diffraction selon des angles différents et les taches de la figure monochromatique deviennent chacune un continuum de couleurs.