Université Paris Sud-11
Décembre 2011 S3PMCP Partiel de Physique Ondes Scalaires
durée 3h, les documents ne sont pas autorisés.

Diffraction à l'infini d'ondes scalaires

L'amplitude complexe F décrivant le processus de diffraction à l'infini par une ouverture dans un écran, d'une onde monochromatique incidente, dont l'amplitude sur l'écran vaut $A(M)$, de pulsation $\omega = kc = \frac{2\pi c}{\lambda}$, est donnée par:

$$F = F(k, \vec{u}) = \int\int_{P \in S} k\, A(P)\, e^{i\varphi(P)} dS(P)$$

avec $\varphi(P)$ donné par: $\varphi(P) = -\overrightarrow{OP}.\vec{k}$ où O est un point de référence sur la surface de l'écran, S représente l'ouverture dans l'écran. Si $\vec{k}_i$ est un des vecteurs d'onde incident et $\vec{k}$ le vecteur d'onde dans la direction diffractée. On a $\left\|\vec{k}_i\right\| = \left\|\vec{k}\right\| = k$, c'est à dire que seule change la direction du vecteur d'onde son module reste constant. On étudiera l'onde diffractée dans le plan $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_z)$ où le vecteur diffracté $\vec{k}$ est donné par $\vec{k} = k\vec{u} = k(\sin\theta\, \vec{u}_x + \cos\theta\, \vec{u}_z)$ où $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$. L'ouverture qui est contenue dans le plan $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$, le point P est repéré par $\overrightarrow{OP} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y$. On mettra en évidence lorsque c'est possible la fonction $\frac{\sin u}{u}$dont les propriétés à retenir sont:

$$(1)\ \lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u} = 1 \text{ et } (2)\ \lim_{\eta\to\infty}\frac{\sin \eta u}{\eta u} = \begin{matrix} 0 \text{ si } u \neq 0 \\ 1 \text{ si } u = 0 \end{matrix}.$$

On va examiner les ondes pour lesquelles le signal de diffraction correspond à l'intensité de l'onde soit $E = |F|^2$.La fente est centrée au point O de coordonnées $(0, 0, 0)$ et a pour extension $-\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}$ et $-\frac{b}{2} \leq y \leq \frac{b}{2}$.On posera $S_0 = kab$

1. Dans le premier cas étudié, l'onde incidente cident $\vec{k}_i = \vec{k}_0 = k\vec{u}_0 = k\,\vec{u}_z$, ce qui correspond à une incidence normale à l'ouverture.

   (a) Que vaut $A(P)$ dans le cas présent?
   Rep:$A(P) = 1$

   (b) Calculez $\varphi(P)$, déduisez-en l'expression de $F(\theta)$. Calculez $E(\theta)$.
   Rep:$\varphi(P) = -k\sin\theta\, x$,
   $F(\theta) = \int_{x=-a/2}^{x=+a/2}\int_{y=-b/2}^{y=+b/2} k\ e^{ik\sin\theta\, x}dx\, dy = k\, b\, a\frac{\sin(k\sin\theta\, a/2)}{k\sin\theta\, a/2} = S_0\frac{\sin(k\sin\theta\, a/2)}{k\sin\theta\, a/2}$,
   $E(\theta) = S_0^2(\frac{\sin(k\sin\theta\, a/2)}{k\sin\theta\, a/2})^2$

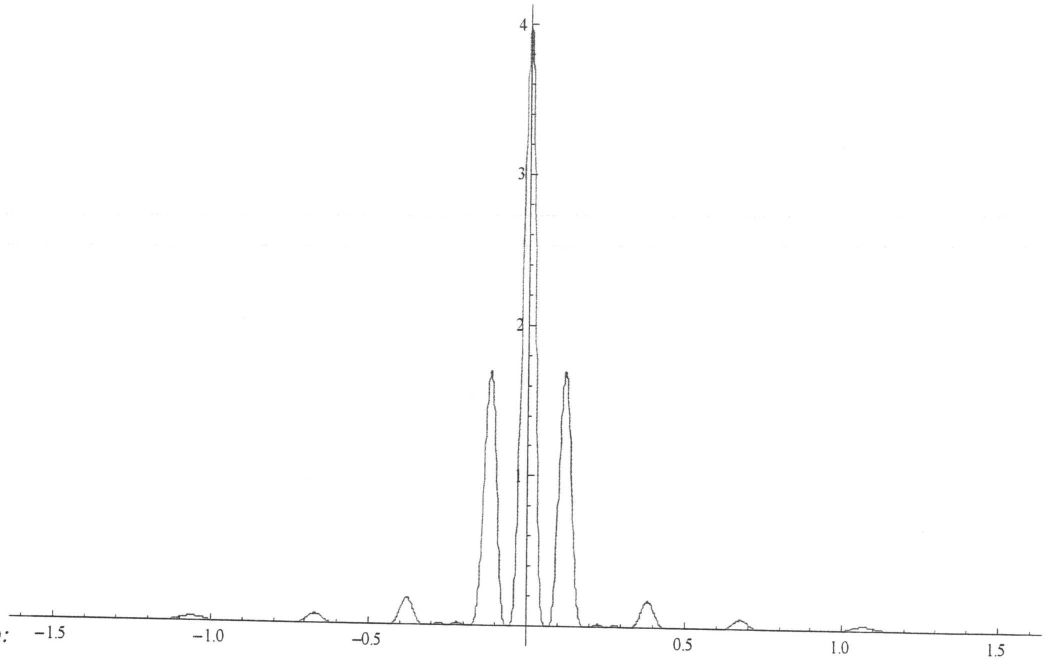
2. Dans ce second cas, l'onde incidente est la même que précedemment, mais une seconde fente identique à la première est ajoutée dont le centre est situé en $x = r, y = 0$.

   (a) Que devient l'expression de $F(\theta)$, on la notera $F_2(\theta)$?
   Rep: $F_2(\theta) = k\, b\, a\frac{\sin(k\sin\theta\, a/2)}{k\sin\theta\, a/2}(1 + e^{-ik\,r\,\sin\theta}) = 2S_0\frac{\sin(k\sin\theta\, a/2)}{k\sin\theta\, a/2}e^{-i(k\,r\,\sin\theta)/2}\cos((k\,r\,\sin\theta)/2)$

   (b) Que devient l'expression de $E(\theta)$,on la notera $E_2(\theta)$?
   Rep: $E_2(\theta) = 4\cos^2((k\,r\,\sin\theta)/2)\, S_0^2(\frac{\sin(k\sin\theta\, a/2)}{k\sin\theta\, a/2})^2$

   (c) Tracez figurativement ce que vous observez sur un écran à l'infini, (par exmple: $a = 1$, $r = 2$ et $k = 8\pi$).

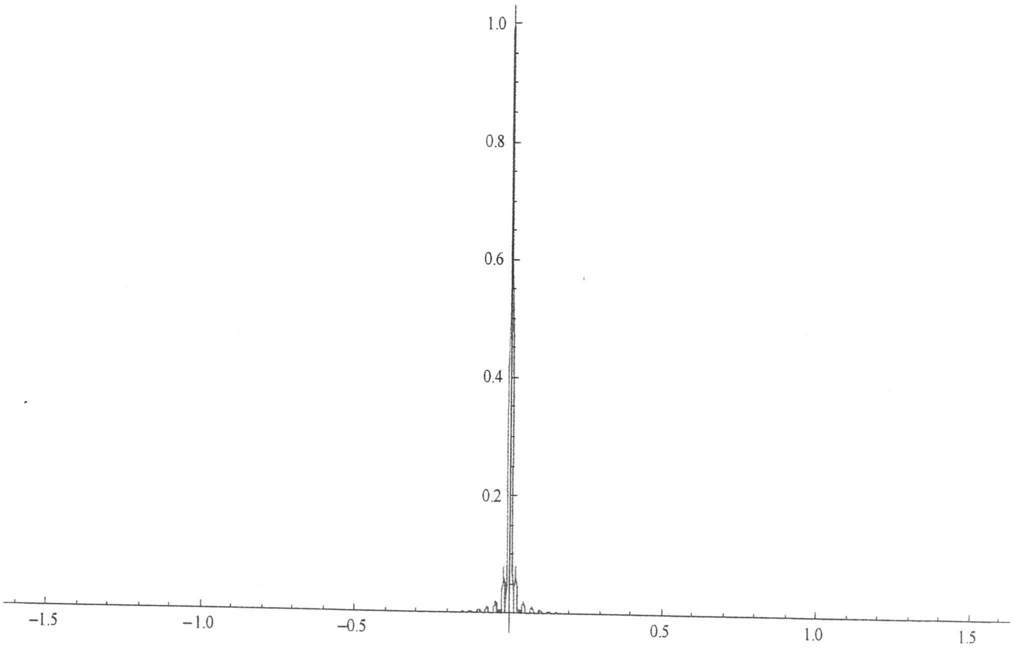
Rep:



3. Ecran complémentaire d'une fente:

   (a) Que devient $E_2(\theta)$ quand $r - a = c$? Donnez l'expression en fonction de r et c.
   Rep: $E_2(\theta) = 4\cos^2((k\,r\,\sin\theta)/2)\,S_0^2(\frac{\sin(k\sin\theta\,(r+c)/2)}{k\sin\theta\,(r+c)/2})^2$

   (b) Que devient $E_2(\theta)/4S_0^2$ à la limite $r- > \infty$? Tracez par exemple avec $c = 1$, $r = 10$ et $k = 8\pi$
   Rep: $E_2(\theta) = 4$ si $\theta = 0, E_2(\theta) = 0$ si $\theta \neq 0$



   (c) En quoi ce résultat est-il surprenant? Qu'arrive t il à l'onde incidente? C'est l'expérience de Fresnel Arago.

   Rep: Il reste un éclairement en face de l'écran, l'onde passe tout droit, tout ce passe comme s'il n'y avait pas d'écran.

4. Dans le troisième cas étudié $A(P) = \cos(\alpha x + \beta)$.

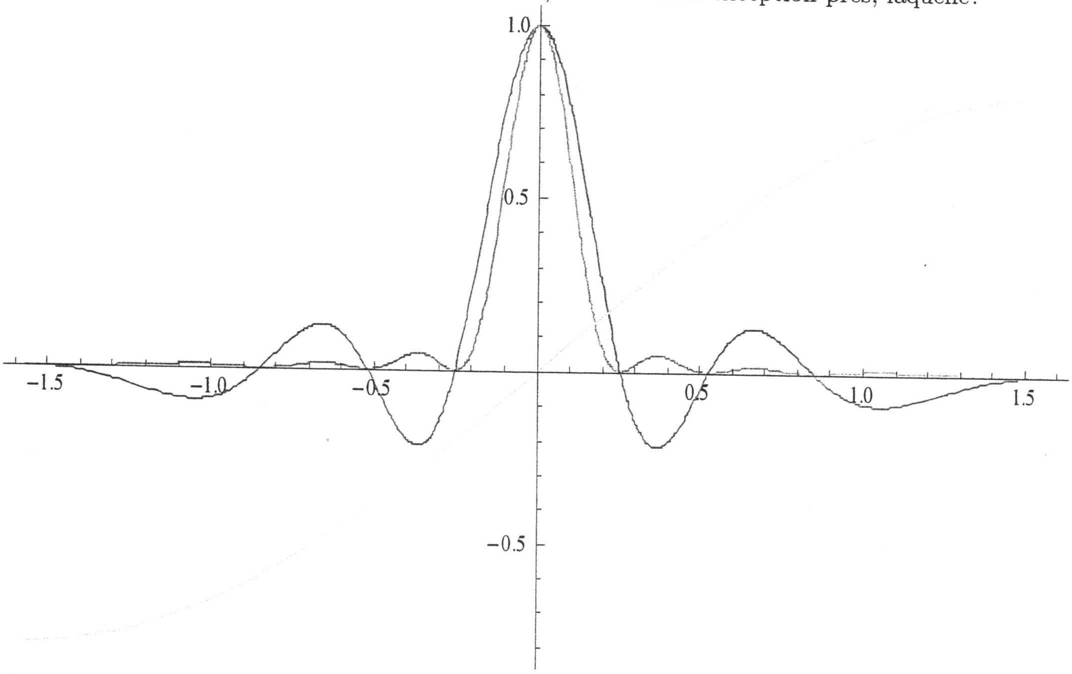
(a) Déterminez $F(\theta)$, laissez l'expression sous forme d'une somme de $\frac{\sin u}{u}$,n'essayez surtout pas de la simplifier plus.

Rep: $F(\theta) = \int_{x=-a/2}^{x=+a/2} \int_{y=-b/2}^{y=+b/2} k \, \cos(\alpha x + \beta) \, e^{ik \sin\theta \, x} dx \, dy$

$= kb \int_{x=-a/2}^{x=+a/2} \frac{1}{2} \left(e^{i(k\sin\theta + \alpha)x + i\beta} + e^{i(k\sin\theta - \alpha)x - i\beta} \right) dx = \frac{e^{-i\beta} \sin(a(k\sin\theta - \alpha)/2)}{k\sin\theta - \alpha} + \frac{e^{i\beta}\sin(a(k\sin\theta + \alpha)/2)}{k\sin\theta + \alpha}$

(b) On se place dans le cas où $\alpha = 0$ et $\beta = 0$.

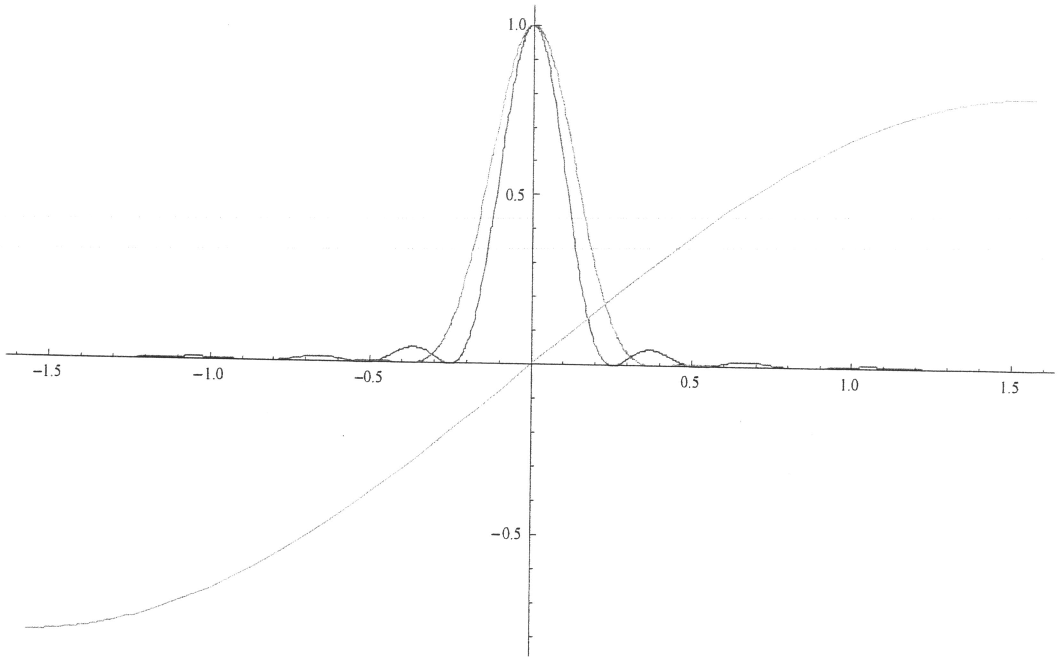
1. Donnez l'expression de $F(\theta)$ correspondant à ces valeurs. Que vaut $F(0)$?
   Rep: $F(\theta) = k\, b\, a \frac{\sin(k\sin\theta\, a/2)}{k\sin\theta\, a/2} = S_0 \frac{\sin(k\sin\theta\, a/2)}{k\sin\theta\, a/2}$, $F(0) = 1$
2. Calculez $E(\theta)$. Que vaut $E(0)$?
   Rep: $E(\theta) = S_0^2 (\frac{\sin(k\sin\theta\, a/2)}{k\sin\theta\, a/2})^2 . E(0) = 1$
3. Pour $a = 1$ et $k = 8\pi$, tracez sur la même figure $F(\theta)$, $E(\theta)$ et la courbe $k\sin\theta\, a/10\pi = p/10$ indiquant la position des maxima et des minima, à une double exception près, laquelle?



   Rep: le premier maximum est en p $= 0$, *le maximum correspondant à p*$=\pm 1$ n'apparaît pas.
4. On définit la largeur angulaire Δ de la tache de diffraction par la distance entre les deux premiers minima de $E(\theta)$ (autour de la valeur maximale θ_0). Donnez son expression à partir de θ.,(supposé petit en radians) en fonction de λ et de a.
   Rep: $k\sin\theta\, a/2 = \pm\pi$ donc $\sin\theta_+ = 2\pi/ka = \lambda/a$. Donc $\Delta = 2\lambda/a$

(c) On se place dans le cas où $\alpha = \pi/a$ et $\beta = 0$. On notera F par F_1 et E par E_1

1. Donnez, sans chercher à trop les simplifier, les expressions de $F_1(\theta)$ et de $E_1(\theta)$.
   Rep: $F_1(\theta) = \frac{\sin(a(k\sin\theta - \pi/a)/2)}{k\sin\theta - \pi/a} + \frac{\sin(a(k\sin\theta + \pi/a)/2)}{k\sin\theta + \pi/a} = \frac{2a\pi\cos((ak\sin\theta)/2)}{\pi^2 - a^2k^2\sin^2\theta}$,
2. $E_1(\theta) = (\frac{\sin(a(k\sin\theta - \pi/a)/2)}{k\sin\theta - \pi/a} + \frac{\sin(a(k\sin\theta + \pi/a)/2)}{k\sin\theta + \pi/a})^2 = (\frac{2a\pi\cos((ak\sin\theta)/2)}{\pi^2 - a^2k^2\sin^2\theta})^2$
3. Que valent $F_1(0)$ et $E_1(0)$?
   Rep: $F_1(0) = \frac{2a}{\pi}, E_1(0) = \frac{4a^2}{\pi^2}$
4. Sur une même figure, pour $a = 1$ et $k = 8\pi$, tracez $E_1(\theta)/E_1(0)$, $E(\theta)$ et la courbe $k\sin\theta\, a/10\pi = p/10$



5. Donnez l'expression de la largeur angulaire Δ_1 de la tache de diffraction ,.en fonction de λ et de a.
   Rep: $\Delta_1 = \frac{3\lambda}{a}$
6. Quels sont les avantages et inconvénients de l'emploi du cas (b) ou du cas (c)? Pourquoi parle -t-on d'apodisation dans le cas (c)?
   Rep: cas (b) centre plus petit mais rebonds , cas (c) centre un peu plus large mais pas de rebonds. On parle d'apodisation car il n'y a plus de maxima secondaires visibles.

Université Paris Sud-11
Décembre 2011 S3PMCP Partiel de Physique Ondes Scalaires
durée 3h, les documents ne sont pas autorisés.

Diffraction à l'infini d'ondes scalaires

L'amplitude complexe F décrivant le processus de diffraction à l'infini par une ouverture dans un écran, d'une onde monochromatique incidente, dont l'amplitude sur l'écran vaut $A(M)$, de pulsation $\omega = kc = \frac{2\pi c}{\lambda}$, est donnée par:

$$F = F(k, \vec{u}) = \int\int_{P\in S} k\, A(P)\, e^{i\varphi(P)} dS(P)$$

avec $\varphi(P)$ donné par: $\varphi(P) = -\,\overrightarrow{OP}.\vec{k}$ où O est un point de référence sur la surface de l'écran, S représente l'ouverture dans l'écran. Si $\vec{k}_i$ est un des vecteurs d'onde incident et $\vec{k}$ le vecteur d'onde dans la direction diffractée. On a $\left\|\vec{k}_i\right\| = \left\|\vec{k}\right\| = k$, c'est à dire que seule change la direction du vecteur d'onde son module reste constant. On étudiera l'onde diffractée dans le plan $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_z)$ où le vecteur diffracté $\vec{k}$ est donné par $\vec{k} = k\vec{u} = k(\sin\theta\,\vec{u}_x + \cos\theta\,\vec{u}_z)$ où $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$. L'ouverture qui est contenue dans le plan $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$, le point P est repéré par $\overrightarrow{OP} = x\vec{u}_x + y\,\vec{u}_y$. On mettra en évidence lorsque c'est possible la fonction $\frac{\sin u}{u}$dont les propriétés à retenir sont:

$$(1)\ \lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u} = 1 \text{ et } (2)\ \lim_{\eta\to\infty}\frac{\sin \eta u}{\eta u} = \begin{array}{l} 0 \text{ si } u \neq 0 \\ 1 \text{ si } u = 0 \end{array}.$$

On va examiner les ondes pour lesquelles le signal de diffraction correspond à l'intensité de l'onde soit $E = |F|^2$.La fente est centrée au point O de coordonnées $(0,0,0)$ et a pour extension $-\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}$ et $-\frac{b}{2} \leq y \leq \frac{b}{2}$.On posera $S_0 = kab$

1. Dans le premier cas étudié, l'onde incidente cident $\vec{k}_i = \vec{k}_0 = k\vec{u}_0 = k\,\vec{u}_z$, ce qui correspond à une incidence normale à l'ouverture.

   (a) Que vaut $A(P)$ dans le cas présent?
   Rep:$A(P) = 1$

   (b) Calculez $\varphi(P)$, déduisez-en l'expression de $F(\theta)$. Calculez $E(\theta)$.
   Rep:$\varphi(P) = -k\sin\theta\, x$,
   $F(\theta) = \int_{x=-a/2}^{x=+a/2}\int_{y=-b/2}^{y=+b/2} k\, e^{ik\sin\theta\, x} dx\, dy = k\,b\,a\frac{\sin(k\sin\theta\, a/2)}{k\sin\theta\, a/2} = S_0\frac{\sin(k\sin\theta\, a/2)}{k\sin\theta\, a/2}$,
   $E(\theta) = S_0^2(\frac{\sin(k\sin\theta\, a/2)}{k\sin\theta\, a/2})^2$

2. Dans ce second cas, l'onde incidente est la même que précedemment, mais une seconde fente identique à la première est ajoutée dont le centre est situé en $x = r, y = 0$.

   (a) Que devient l'expression de $F(\theta)$, on la notera $F_2(\theta)$?
   Rep: $F_2(\theta) = k\,b\,a\frac{\sin(k\sin\theta\, a/2)}{k\sin\theta\, a/2}(1 + e^{-ik\,r\,\sin\theta}) = 2S_0\frac{\sin(k\sin\theta\, a/2)}{k\sin\theta\, a/2}e^{-i(k\,r\,\sin\theta)/2}\cos((k\,r\,\sin\theta)/2)$

   (b) Que devient l'expression de $E(\theta)$,on la notera $E_2(\theta)$?
   Rep: $E_2(\theta) = 4\cos^2((k\,r\,\sin\theta)/2)\,S_0^2(\frac{\sin(k\sin\theta\, a/2)}{k\sin\theta\, a/2})^2$

   (c) Tracez figurativement ce que vous observez sur un écran à l'infini, (par exmple: $a = 1$, $r = 2$ et $k = 8\pi$).