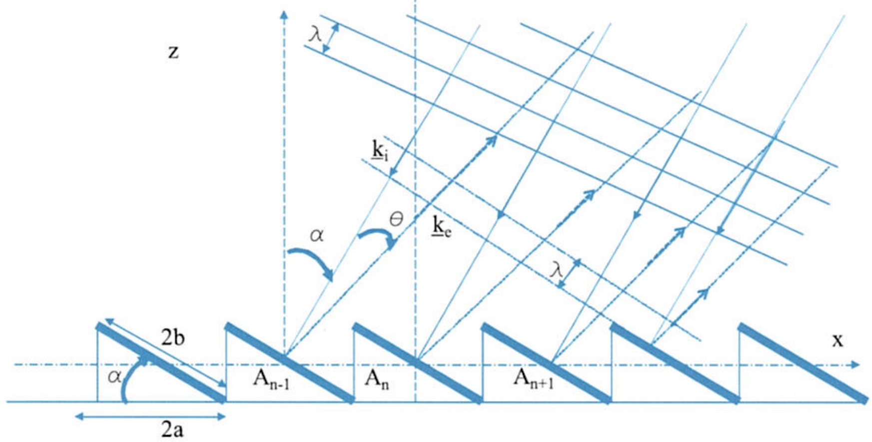
Université Paris Sud 11 S3PMCP Ondes Scalaires
16 Décembre 2008.
Durée 3h
Calculatrices autorisées
Sans documents

Réseau à échelettes

Un réseau à échelette est constitué par un grand nombre N de bandes réfléchissantes parallèles entre elles mais non coplanaires (voir figure1) formant un réseau par réflexion. L'espace est décrit par un repère orthonorné $(O, \overrightarrow{u}_x, \overrightarrow{u}_y, \overrightarrow{u}_z)$. Les bandes font un angle α avec le plan (xOy) perpendiculaire à l'axe z. Les bandes réfléchissantes sont toutes de longueur d.

Important: Dans ce qui suit on n'étudiera que les vecteurs d'onde contenus dans le plan (xOz). Les vecteurs seront décomposés sous la forme: $\overrightarrow{v}(\mathrm{v}, \varphi) = \mathrm{v}\ (\cos\varphi\ \overrightarrow{u}_z + \sin\varphi\ \overrightarrow{u}_x)$.



Le réseau à échelettes

Une onde plane monochromatique de longueur d'onde λ arrive sur le réseau en incidence normale avec le vecteur d'onde $\overrightarrow{k}_i$ et est réfléchie avec le vecteur d'onde émergent $\overrightarrow{k}_e$. L'angle entre $\overrightarrow{k}_i$ et $\overrightarrow{k}_e$est désigné par θ.(voir figure). L'amplitude complexe F décrivant le processus de diffraction à l'infini par une surface réfléchissante, d'une onde plane monochromatique incidente de pulsation $\omega = kc = \frac{2\pi c}{\lambda}$, est donnée par:

$$F = F(k, \overrightarrow{u}_i, \overrightarrow{u}_e) = \int\int_{P\in S} k e^{i\varphi(P)} dS(P) \qquad \text{((I))}$$

avec $\varphi(P)$ donné par:

$$\varphi(P) = \overrightarrow{OP}.(\overrightarrow{k}_i + \overrightarrow{k_e}) \qquad \text{((II))}$$

où O est un point de référence sur la surface réfléchissante, choisi par commodité dans le plan inférieur de la figure, S représente la partie éclairée, $\overrightarrow{k}_i$ le vecteur d'onde incident, $\overrightarrow{k}$ le vecteur d'onde dans la direction diffractée. On a $\left\|\overrightarrow{k}_i\right\| = \left\|\overrightarrow{k}_e\right\| = k$, c'est à dire que seule change la direction du vecteur d'onde, son module est conservé.Le vecteur d'onde incident $\overrightarrow{k}_i$ est donné par $\overrightarrow{k}_i = k\ \overrightarrow{u}_i = k\ (\sin\alpha\ \overrightarrow{u}_x + \cos\alpha\ \overrightarrow{u}_z)$. Le vecteur diffracté $\overrightarrow{k}_e$ est donné par $\overrightarrow{k}_e = k\ \overrightarrow{u} = k\ (\sin(\theta+\alpha)\ \overrightarrow{u}_x + \cos(\theta+\alpha)\ \overrightarrow{u}_z)$.Les bandes sont inclinées suivant les indication de la figure. Le point P est repéré par $\overrightarrow{OP}.= x\ \overrightarrow{u}_x + z\ \overrightarrow{u}_z$. On mettra en évidence lorsque c'est possible la fonction $\frac{\sin\eta u}{\eta u}$dont les propriétés utiles sont :

$$(1)\ \lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u} = 1 \text{ et } (2)\ \lim_{\eta\to\infty}\frac{\sin\eta u}{\eta u} = \begin{matrix} 0 \text{ si } u \neq 0 \\ 1 \text{ si } u = 0 \end{matrix}$$

On va examiner les ondes pour lesquelles le signal de diffraction correspond à l'intensité de l'onde soit $E = |F|^2$.

Diffraction à l'infini par une bande réfléchissante: La fente est centrée au point A_n de coordonnées $(x_n = (2n-1)a\ , 0, z_n\ = b\ \sin\alpha)$ et a pour extension (approximative) $-\frac{a}{2} \leq x - x_n \leq \frac{a}{2}$ et $0 \leq z \leq 2b\ \sin\alpha$

1. Evaluez le lieu des points P sur la fente n par une relation entre z et x.
2. Que vaut $\varphi(P)$ en fonction des données précédentes?
3. Déduisez-en l'expression intégrale de $F(k, \overrightarrow{u}_i, \overrightarrow{u}_e)$ pour la bande réfléchissante n de longueur d (suivant la dimension y.)
4. Calculez cette intégrale et déterminez $F(k, \overrightarrow{u}_i, \overrightarrow{u}_e)$. On posera $S_0 = k\ d\ b$.
5. Calculez $E = |F|^2$. exprimez cette quantité au moyen des angles θ et/ou α.Pour quelles valeurs des angles α et θ obtient-on un maximum d'intensité? Donnez en une interprétation simple.
6. Tracez E en fonction de la variable θ. Indiquez la position des minima de cette fonction.
7. On définit la largeur angulaire de la tache de diffraction par la distance entre les deux premiers minima de E (autour de la valeur maximale). Donnez son expression en fonction de θ.
8. Si l'on regarde la figure obtenue au plan focal d'une lentille comment doit on choisir l'orientation de son axe optique pour obtenir:
$$x' = \theta\ f$$
où f est la distance focale de la lentille et $x\prime$ la coordonée sur le plan focal.

Donnez alors l'expression de E en fonction de $x\prime$ .On suggère d'exprimer le résultat en fonction des variables:
$$I = \frac{\lambda f}{b}$$

Diffraction par l'ensemble des bandes du réseau

9. Pour calculer la différence de marche entre deux bandes n et m du réseau, il suffit de calculer la quantité $\psi(n,m) = \overrightarrow{A_n A_m}.(\overrightarrow{k}_i + \overrightarrow{k_e})$.Pourquoi? Construisez votre réponse en vous appuyant sur la formule (I).
10. Calculez ψ,la diférence de marche entre les bandes n et $n+1$.
11. Simplifiez cette expression en supposant l'angle θ petit et en faisant apparaître la longueur b.
12. Donnez l'expression de l'amplitude diffractée par un réseau de N bandes($n = 1$ à N) dans la direction θ soit $F_N(k,\theta)$. On rapelle que $\frac{1-x^N}{1-x} = \sum_{n=0}^{n=N-1} x^n$.
13. Déduisez en $E_N(k,\theta) = |F_N(k,\theta)|^2$.
14. Montrez que cette expression peut semettre sous la forme du produit $E_N(k,\theta) = E(k,\theta)R_N(k,\theta)$.
15. Cherchez les minima et les maxima de $E(k,\theta)$ et les maxima principaux de $R_N(k,\theta)$.
16. Représentez sur par une série de trois courbes les fonctions $E(k,\theta)$, $R_N(k,\theta)$ et $E_N(k,\theta)$. Prenez le cas où N=10, $\lambda = 1, a = 100, \alpha = 4$ degrés.
17. Déterminez la direction du maximum principal d'ordre zéro ($\psi = 0$). Simplifiez l'expression obtenue en considérant que les angles α et θ sont petits.
18. Montrez qu'un seul ordre de diffraction subsiste dans le cas où l'on choisit la valeur de l'angle α telle que $\alpha = \frac{\lambda}{2b}$. Lequel? Pour répondre aidez vous des trois figures précédentes.
19. Que se passe t il si on éclaire ce réseau par un faisceau de lumière blanche, où toutes les longueurs d'onde sont présentes?