L3 Physique et Applications
Année 2016-2017

Université Paris-Sud

Physique Quantique

Partiel du 3 novembre 2016

Durée : 2 heures

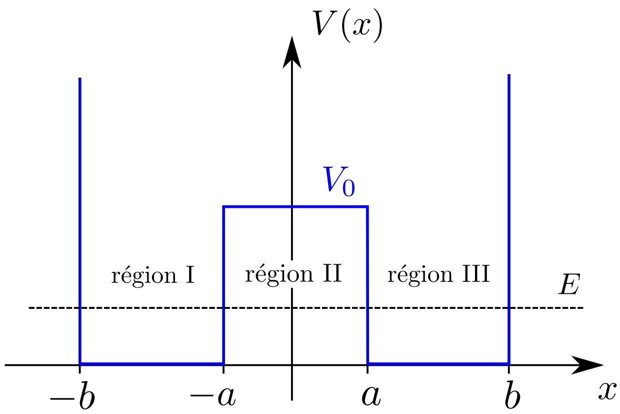
Aucun document n'est autorisé, pas plus que téléphone portable ou calculatrice

Exercice 1 : double puits de potentiel

On considère une particule de masse m piégée dans le potentiel

$$V(x) = \begin{cases} V_0 > 0 & \text{pour} \quad -a < x < a \\ 0 & \text{pour} \quad -b < x < -a \text{ et } a < x < b \\ +\infty & \text{pour} \quad x < -b \text{ et } x > b \end{cases}$$

Ce potentiel est représenté ci-dessous.



On suppose que la particule a une énergie E comprise entre 0 et V_0. On distingue 3 régions :

$$\begin{cases} \text{région I :} & -b < x < -a \\ \text{région II :} & -a < x < a \\ \text{région III :} & a < x < b \end{cases}$$

1. Écrire l'équation de Schrödinger dépendante du temps satisfaite par la fonction d'onde $\psi(x,t)$. Pourquoi peut-on chercher des solutions sous la forme $\psi(x,t) = \phi(x)e^{-iEt/\hbar}$?
2. Écrire l'équation de Schrödinger indépendante du temps vérifiée par la fonction d'onde $\phi(x)$ dans chacune des trois régions.
3. Écrire la forme générale de la fonction d'onde $\phi(x)$ dans chaque région. On introduira les constantes $k = \sqrt{2mE}/\hbar$ et $\alpha = \sqrt{2m(V_0 - E)}/\hbar$.
   On ne cherchera pas à fixer les constantes d'intégration ou à normaliser la fonction d'onde.
4. Quelle condition doit vérifier $\phi(x)$ en $x = -b$ et $x = b$?

On donne les solutions suivantes :

$$\phi^{(S)}(x) = \begin{cases} -A\ \sin(k(x+b)) & \text{pour} \quad -b < x < -a \\ B\ \cosh(\alpha x) & \text{pour} \quad -a < x < a \\ A\ \sin(k(x-b)) & \text{pour} \quad a < x < b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\phi^{(A)}(x) = \begin{cases} A\ \sin(k(x+b)) & \text{pour} \quad -b < x < -a \\ B\ \sinh(\alpha x) & \text{pour} \quad -a < x < a \\ A\ \sin(k(x-b)) & \text{pour} \quad a < x < b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

5. Rappeler l'expression de l'opérateur $\hat{p}_x$. En se basant sur un argument vu en TD, justifier pourquoi $\langle p_x \rangle = 0$ pour une particule décrite par $\phi^{(S)}$ ou $\phi^{(A)}$.
6. Justifier que $\phi^{(S)}$ soit appelée "solution symétrique" et $\phi^{(A)}$ "solution antisymétrique".
7. Écrire les conditions de continuité de $\phi^{(S)}$ et $\phi^{(A)}$ ainsi que de $\mathrm{d}\phi^{(S)}/\mathrm{d}x$ et $\mathrm{d}\phi^{(A)}/\mathrm{d}x$ en $x = -a$ et $x = a$.
8. Montrer que ces conditions imposent les relations suivantes :

$$\tan(k(b-a)) = -\frac{k}{\alpha}\frac{1}{\tanh(\alpha a)} \quad \text{pour} \quad \phi^{(S)} ,$$

$$\tan(k(b-a)) = -\frac{k}{\alpha}\tanh(\alpha a) \quad \text{pour} \quad \phi^{(A)} .$$

9. On se place maintenant dans le cas $E << V_0$, de telle sorte que l'on peut se placer dans la limite $\frac{k}{\alpha} \to 0$. Que deviennent les relations précédentes ? Quelles sont les énergies permises ?
10. Tracer l'allure des fonctions d'ondes $\phi^{(S)}$ et $\phi^{(A)}$ de plus basse énergie.

Exercice 2 : système à deux niveaux

On considère un système physique décrit par un Hamiltonien $\hat{H}$ qui possède deux états propres $|\psi_1\rangle$ et $|\psi_2\rangle$, associés respectivement aux énergie E_1 et E_2 (différentes).
On s'intéresse à une grandeur physique A représentée par l'opérateur $\hat{A}$ qui agit de la manière suivante :

$$\hat{A}|\psi_1\rangle = |\psi_2\rangle , \qquad \hat{A}|\psi_2\rangle = |\psi_1\rangle .$$

À $t = 0$, le système est dans l'état $|\Psi(t=0)\rangle = \theta(|\psi_1\rangle - |\psi_2\rangle)$, où θ est une constante.

1. Quelle doit être la valeur de $|\theta|$ pour que cet état soit normé ?
2. Quelle équation donne l'évolution temporelle de cet état ?
3. Donner l'expression de $|\Psi(t)\rangle$, en fonction de E_1, E_2, $|\psi_1\rangle$ et $|\psi_2\rangle$.
4. Définir et calculer $\left\langle \hat{H} \right\rangle$ dans l'état $|\Psi(t)\rangle$.
5. Définir et calculer l'écart quadratique moyen $(\Delta H)^2$ dans l'état $|\Psi(t)\rangle$.
6. Quelles sont les valeurs propres et les vecteurs propres (normés) de $\hat{A}$, exprimés en fonction de $|\psi_1\rangle$ et $|\psi_2\rangle$?
7. Si l'on effectue une mesure de A, quels sont les résultats possibles ?
8. Quelle est la probabilité de trouver comme résultat -1 à $t = 0$?
9. Quelle est la probabilité de trouver comme résultat -1 au temps $t > 0$?
10. Tracer l'évolution de cette probabilité en fonction du temps.
11. Juste après une mesure ayant donné comme résultat -1, quel est l'état du système ?