

Questions de cours

1. Demarche : obtenir des lois de comportement macroscopique (thermodynamique) à partir d'une description microscopique.

Fonction de partition : donne accès aux grandeurs thermodynamiques ainsi qu'aux fluctuations.

$$2. \quad P = \frac{e^{-\beta E}}{Z} \quad \text{avec } \beta = \frac{1}{k_B T} \quad \text{et } Z = \sum e^{-\beta E_i}$$

$$3. \quad \langle E \rangle = - \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}, \quad F = -k_B T \ln Z$$

Contribution des moments intrinsèques

4. particules disymétriques et indépendantes: $Z = z^N$

$$F = -k_B T \ln Z = -N k_B T \ln z = N f \quad \text{avec } f = -k_B T \ln z$$

5. deux états $E_{\pm} = \pm \mu B$, $z = e^{-\beta E_+} + e^{-\beta E_-} = e^{-\beta \mu B} + e^{\beta \mu B}$

$$\text{soit } z = 2 \cosh(\mu B / k_B T)$$

$$6. \quad M = -\frac{\partial F}{\partial B} = -N \frac{\partial f}{\partial B} = k_B T N \frac{2}{B} \ln \left[2 \cosh \left(\frac{\mu B}{k_B T} \right) \right] = N \mu \frac{\sinh \left[\frac{\mu B}{k_B T} \right]}{\cosh \left[\frac{\mu B}{k_B T} \right]}$$

soit

$$\boxed{M = N \mu \tanh \left[\frac{\mu B}{k_B T} \right]}$$

$\cdot \mu B / k_B T \gg 1 \rightarrow$ tous les moments sont alignés avec B



- $\chi_o^P > 0 \Rightarrow$ paramagnétique

8. on a

$$\boxed{P_{\pm} = \frac{e^{-\beta E_{\pm}}}{Z}}$$

(loi de Boltzmann)

$$9. \quad \langle \mu \rangle = (+\mu) P_+ + (-\mu) P_- = \mu \frac{e^{+\mu B / k_B T} - e^{-\mu B / k_B T}}{2 \cosh \left[\frac{\mu B}{k_B T} \right]}$$

soit

$$\boxed{\langle \mu \rangle = \mu \tanh \left[\frac{\mu B}{k_B T} \right]}$$

$$\boxed{M = N \langle \mu \rangle}$$

redonne bien le résultat précédent

Gaz parfait à deux dimensions

10. pour un gaz parfait les particules sont indépendantes et indépendantes: $Z = \frac{z_0^N}{N! A^N}$

$$11. \quad z_0 = \iint_{\mathbb{R}^2} d\vec{q} d\vec{p} \quad e^{-\beta \frac{\vec{p}^2}{2m}} \quad \text{soit } \alpha = 2, \quad \beta = \frac{1}{k_B T}, \quad h(\vec{q}, \vec{p}) = \frac{\vec{p}^2}{2m}$$

$$\text{et } \vec{q} = (x, y), \quad \vec{p} = (p_x, p_y) \in \mathbb{R}^2$$

$$\vec{q} \in S \quad \text{et } \vec{p} \in \mathbb{R}^2$$

$$12. \quad z_0 = \frac{1}{h} \left(\iint_{S} d\vec{q} \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} dp_x e^{-\beta p_x^2 / 2m} \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} dp_y e^{-\beta p_y^2 / 2m} \right) = \frac{S}{h^2}$$

soit

$$h = \frac{V}{L^2}$$

13. On a maintenant $h(\vec{q}, \vec{p}) = \frac{(\vec{p} + e\vec{A})^2}{2m}$ avec $\vec{A} = Bx\hat{e}_y$

d'où

$$Z_0 = \frac{1}{h^2} \int d\vec{q} \int d\vec{p} e^{-\beta p_{\text{ext}}^2/m} \int_{-\infty}^{+\infty} dp_x e^{-\beta(p_x + eBx)^2/m}$$

Le ne se factorise pas a priori indépendant de x

$$= \frac{\pi}{p_{\text{ext}}} \quad \text{d'après le formulaire ou en faisant } p_y' = p_y + eBx$$

$$\text{donc } Z_0 = \frac{\pi}{h^2} \text{ est inchangé et indépendant de } B.$$

Ainsi F ne dépend pas de B et donc $M = -\frac{\partial F}{\partial B} = 0$

si l'on ne considère que la contribution orbitale.
(c'est le théorème de van Leeuwen)

14. On aura $Z = \frac{Z_B^N}{N!}$ avec cette fois

$$Z_B = \sum_{n=0}^{\infty} D e^{-\beta E_n} = D \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\beta \hbar \omega (n+1/2)}$$

↳ dégénérence indépendante de n

$$= D e^{-\beta \hbar \omega/2} \sum_{n=0}^{\infty} (\bar{e}^{-\beta \hbar \omega})^n = D \frac{\bar{e}^{-\beta \hbar \omega}}{1 - e^{-\beta \hbar \omega}} = D \frac{1}{1 - e^{-\beta \hbar \omega}} = \frac{D}{2 \sinh \frac{\beta \hbar \omega}{kT}}$$

géométrique

$$\text{Donc } Z_B = \frac{e^{\beta E_S}}{h} \frac{1}{2 \sinh \left[\frac{\beta \hbar \omega}{2 k T} \right]}$$

on a $\sinh x \approx x$ pour $x \rightarrow 0$
soit $Z_B \approx \frac{e^{\beta E_S}}{h k T} \frac{m k T}{e \beta} = \frac{S}{h^2 k^2 m^2}$

on retrouve bien Z_0

$$15. F = -N k_B T \ln Z_B + k_B T \ln N!$$

$$\text{et } M = -\frac{\partial F}{\partial B} = +N k_B T \frac{\partial \ln Z_B}{\partial B} = N k_B T \left(\frac{2}{\partial B} \ln B - \frac{2}{B} \ln \tanh \left(\frac{\mu B}{k_B T} \right) \right)$$

$$\text{en utilisant que } \mu = \frac{h e}{2m} = N k_B T \left(\frac{1}{B} - \frac{\mu}{k_B T} \coth \frac{\mu B}{k_B T} \right)$$

$$= \Theta \mu \left(\coth \left(\frac{\mu B}{k_B T} \right) - \frac{k_B T}{\mu B} \right)$$

finalement

$$M = -N \mu \mathcal{L} \left(\frac{\mu B}{k_B T} \right)$$

$$= N \mu \mathcal{L}(x)$$

$$= N \mu \left(\coth x - \frac{1}{x} \right)$$

16. $\mathcal{L}(x) \approx \frac{x}{3}$ pour $x \rightarrow 0$ d'après le formulaire.

$$\text{d'où } M \approx -\frac{N \mu^2}{3 k_B T} B \text{ lorsque } \frac{\mu B}{k_B T} \ll 1 \text{ et } \chi_0 = -N \frac{\mu^2}{3 k_B T}$$

on a $\chi_0 < 0 \Rightarrow$ diagnétisme

17. si on fait $B \rightarrow 0$, $\frac{\mu B}{k_B T} \rightarrow 0$ donc $M \approx -\frac{N \mu^2}{3 k_B T}$ indépendant de B

on a $\mu = \frac{h e}{2m} \rightarrow 0$ donc $M \rightarrow 0$
On retrouve que l'aimantation est nulle dans la limite classique.

$$18. \chi_{\text{tot}}^{\text{tot}} = \chi_0^P + \chi_0^L = N \frac{\mu^2}{k_B T} \left(1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{2}{3} \chi_0^P > 0$$

La réponse globale est alors paramagnétique.