

## Questions de cours:

1. le système physique est isolé, il n'échange ni énergie, ni particule, ni volume avec l'extérieur.  
Les variables macroscopiques  $E, V, N$  sont fixées.
2. L'espace des phases est l'ensemble des  $(\vec{q}_1, \vec{p}_1, \dots, \vec{q}_N, \vec{p}_N)$   
Sa dimension est  $6N$ .
3. On peut écrire:

$$\Omega(E, V, N) = \frac{1}{N! h^{3N}} \int \dots \int d\vec{q}_1 \dots d\vec{p}_N$$

$$E \leq \mathcal{H}(\vec{q}_1, \dots, \vec{p}_N) \leq E + \delta E$$

avec :

- \*  $\frac{1}{N!}$ : facteur pour tenir compte de l'indiscernabilité des particules.
- \*  $h^{3N}$ : volume de la cellule élémentaire contenant un micro-état
- \*  $E \leq \mathcal{H}(\vec{q}_1, \dots, \vec{p}_N) \leq E + \delta E$ : domaine où se trouvent les micro-états accessibles, c'est-à-dire ayant une énergie  $E$  à  $\delta E$  près

4. Formule de Boltzmann:

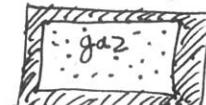
$$S(E, V, N) = k_B \ln \Omega(E, V, N)$$

avec  $k_B$  la constante de Boltzmann.  $[k_B] = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$

5. Détente de Joule: un gaz confiné initialement dans un compartiment de volume  $V_1$  est relâché dans un volume plus grand  $V_1 + V_2$  par retrait de la paroi entre les volumes  $V_1$  et  $V_2$ . Le système reste isolé



évolution  
après retrait  
de la paroi



La détente de Joule est un phénomène irréversible.

Q' énergie est conservée lors de la transformation car il n'y a ni échange de chaleur, ni échange de travail.

Q' entropie augmente.

Si d'après la formule précédente en prenant  $\frac{d\Omega}{dV} = \sum_{i=1}^N \frac{\vec{p}_i^2}{2m}$  pour un gaz parfait, l'intégrale sur le volume se fait facilement  $\int d\vec{q}_1 \dots d\vec{q}_N = V^N$ .

Si on note  $\Omega^{\text{cin}}(E, N) = \int_{E-\delta E}^{E+\delta E} \int \dots \int d\vec{p}_1 \dots d\vec{p}_N$ , on peut écrire

$$\boxed{\Omega(E, V, N) = \frac{V^N}{N!} \Omega^{\text{cin}}(E, N)} \quad \text{si bien que } \boxed{\Omega \propto V^N}$$

comme le volume augmente  $V_f > V_i$  et  $\Omega_f >> \Omega_i$ , les micro-états qui correspondent à l'état initial sont en nombre négligeables et deviennent complètement improbables bien que possibles. C'est la raison pour laquelle il y a irréversibilité.

6. Écrivons l'énergie totale comme la somme d'une énergie cinétique et d'une énergie d'interaction.

$E_i = E_f$  avec  $E_{i,f} = E_{i,f}^{\text{cin}} + E_{i,f}^{\text{int}}$  pour les états initiaux et finaux.

A priori,  $E^{\text{cin}} > 0$  et  $E^{\text{int}} < 0$  et diminue lorsque la densité augmente. De plus, les parties cinétiques sont reliées à la température selon  $E_{i,f}^{\text{cin}} = \frac{3}{2} N k_B T_{i,f}$  d'où

$$\frac{3}{2} N k_B (T_f - T_i) = E_i^{\text{int}} - E_f^{\text{int}} < 0 \text{ donc } \boxed{T_f < T_i}$$

et la température diminue lors de la détente.

# Fluctuations de l'intensité d'un laser

1. le photon parcourt  $2L$  à la vitesse  $c$  donc  $t_{\text{ar}} = \frac{2L}{c}$

2. probabilité pour que le photon s'échappe au  $n^{\text{ème}}$  aller-retour  
 = proba (qu'il fasse  $n$  aller-retours  $\times$  proba (de sortir  
 soit  $P_n = R^n T$        $\boxed{N.B: \text{normalisation: } \sum_{n=0}^{+\infty} P_n = T \sum_{n=0}^{+\infty} R^n = T \frac{1}{1-R} = 1}$   
 d'être réfléchi  $n$  fois      d'être transmis

3.  $Z = \sum_{n=0}^{+\infty} P_n t_n$       avec       $t_n$ : temps passé pour faire  
 $= t_{\text{ar}} \sum_{n=0}^{+\infty} n R^n T$        $t_n = n t_{\text{ar}}$   
 soit  $\boxed{Z = T t_{\text{ar}} \sum_{n=0}^{+\infty} n R^n}$

4. on a  $f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n R^n x^{n-1}$  donc  $\boxed{Z = -T t_{\text{ar}} f'(1)}$

5. on calcule  $f'(x) = \frac{+R}{(1-xR)^2}$  soit  $f'(1) = \frac{R}{(1-R)^2} = \frac{R}{T^2} = \frac{1-T}{T^2}$

ainsi:  $\boxed{Z = \frac{2L}{c} \frac{1-T}{T}}$       Rq: si  $T \rightarrow 1$ :  $Z = 0$  (intuitif)  
 si  $T \rightarrow 0$ :  $Z \rightarrow \infty$  (également)

6.  $L = 0,2 \text{ m}$ ,  $T = 0,05 = 5 \cdot 10^{-2}$        $\left. \begin{array}{l} 1-T = 0,95 \approx 1 \\ c = 3 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1} \end{array} \right\} Z \approx \frac{0,4}{3 \cdot 10^8} \frac{1}{5 \cdot 10^{-2}} \approx 2 \cdot 10^{-8} \text{ s}$   
 c'est court!

7. si  $T \ll 1$ ,  $t_{\text{ar}} \ll Z$  et on peut écrire  $\boxed{t \approx n t_{\text{ar}}, Z \approx \frac{t_{\text{ar}}}{T}}$

ainsi que  $P(t) = P_n = R^n T = (1-T)^n T$   
 $= T e^{n \ln(1-T)} \approx T e^{-nT}$  et  $n = \frac{t}{t_{\text{ar}}}$

soit  $\boxed{P(t) \approx \frac{t_{\text{ar}}}{Z} e^{-t/Z}}$  loi exponentielle

8. chaque photons a une probabilité  $T$  de sortir,  $1-T$  de ne pas sortir. Si  $k$  photons parmi  $N$  sortent pendant  $\Delta t$ , la probabilité correspondante suit une loi binomiale:

$$P_N(k) = \binom{N}{k} T^k (1-T)^{N-k}$$

9.  $\langle k \rangle = \sum_{k=0}^N k P_N(k)$

on utilise  $f(x) = \sum_{k=0}^N x^k P_N(k) = (Tx + R)^N$  telle que

$$\langle k \rangle = f'(1) = NT$$

de même,  $\sigma^2 = \langle k^2 \rangle - \langle k \rangle^2$  et  $f''(1) = \langle k(k-1) \rangle = N(N-1)T^2$   
 $= \underbrace{N(N-1)T^2}_{\langle k(k-1) \rangle} + \underbrace{NT}_{\langle k \rangle} - \underbrace{(NT)^2}_{\langle k \rangle^2} = NT(1-T)$

soit  $\sigma = \sqrt{NT(1-T)}$

10. Puissance moyenne émise pendant  $\Delta t$ : les photons portent chacun une énergie  $h\nu$  dont l'énergie moyenne émise est  $h\nu \langle k \rangle$  et la puissance vaut  $\langle S \rangle = \frac{h\nu \langle k \rangle}{\Delta t} = \frac{h\nu}{\Delta t} NT$

11. Si  $T \ll 1$ , mais  $\langle S \rangle$  fixé (raisonnable physiquement), alors  $NT$  est fixé avec  $T \rightarrow 0$ . On sait alors que la binomiale tend vers une loi de Poisson de paramètre  $\mu = NT$  ( $\text{cf cons et TD}$ ),  $\sigma^2 = NT$

$$P(k) = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}$$

12. On a:

$$\langle S \rangle = 10 \cdot 10^{-3} W = 10^{-2} W$$

$$h\nu = \frac{hc}{\lambda} \approx \frac{6 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{600 \cdot 10^{-9}} = 3 \cdot 10^{-19} J$$

et  $\frac{\Delta S}{\langle S \rangle} = \frac{1}{\sqrt{NT}} = \sqrt{\frac{h\nu}{\langle S \rangle \Delta t}}$  fluctuations relatives

AN: pour  $\Delta t = 10^{-3} s$ :  $\frac{\Delta S}{\langle S \rangle} = \sqrt{\frac{3 \cdot 10^{-19}}{10^{-2} \cdot 10^{-3}}} \approx 6.1 \times 10^{-4}$  << 1  
 pour  $\Delta t = 10^{-9} s$ :  $\frac{\Delta S}{\langle S \rangle} \approx 2 \cdot 10^{-4}$  non mesurable

## Mouvement brownien selon Langevin:

1.  $\vec{Z}(t)$  a pour origine les chocs induits par les molécules du fluide environnant.

2.  $\boxed{\frac{d}{dt} \vec{r}^2 = 2 \vec{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = 2 \vec{r} \cdot \vec{v}}$  et  $\boxed{\frac{d^2}{dt^2} \vec{r}^2 = 2 \vec{v}^2 + 2 \vec{r} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}}$

3. d'où  $m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{r} = \frac{m}{2} \left\{ \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}^2 - 2 \vec{v}^2 \right\} = -\gamma \underbrace{\vec{r} \cdot \vec{v}}_{\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \vec{r}^2} + \vec{d}(t) \cdot \vec{r}$

soit  $\boxed{\frac{m}{2} \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}^2 = m \vec{v}^2 - \frac{\gamma}{2} \frac{d}{dt} \vec{r}^2 + \vec{r} \cdot \vec{d}(t)}$

4.  $\langle \vec{r} \cdot \vec{Z}(t) \rangle = \langle \vec{r} \rangle \cdot \langle \vec{Z}(t) \rangle = 0$   $\stackrel{\leftrightarrow}{=} \vec{0}$  d'après l'inertie.

l'hypothèse de décongélation

et  $\langle \frac{d}{dt} \vec{r}^2 \rangle = \frac{1}{N_r} \sum_{i=1}^{N_r} \frac{d}{dt} \vec{r}_i^2 = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{N_r} \sum_{i=1}^{N_r} \vec{r}_i^2 \right) = \frac{d}{dt} \langle \vec{r}^2 \rangle$

de même pour les autres dérivées.

5. On prend la moyenne de l'équation:

$$\frac{m}{2} \frac{d^2}{dt^2} \langle \vec{r}^2 \rangle = m \langle \vec{v}^2 \rangle - \frac{\gamma}{2} \frac{d}{dt} \langle \vec{r}^2 \rangle + \langle \vec{r} \cdot \vec{d}(t) \rangle$$

soit  $w(t) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle \vec{r}^2 \rangle$ , on a donc  $\boxed{m \frac{dw}{dt} + \gamma w = m \langle \vec{v}^2 \rangle}$

6. On a donc  $m \frac{dw}{dt} + \gamma w = \frac{3k_B T}{m} m$  et  $w(0) = 0$

sans second membre:  $\frac{dw}{dt} + \frac{\gamma}{m} w = 0$  donne  $w(t) = A e^{-t/\tau}$   
 ( $A$  constante)

avec second membre: une solution triviale est  $w(t) = \frac{3k_B T}{\gamma} = D$   
 donc au total, la solution est  $w(t) = D + A e^{-t/\tau}$  et  $w(0) = 0 \Rightarrow A = -D$

ainsi

$$\boxed{w(t) = D(1 - e^{-t/\tau})}$$

7. On en déduit :  $\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle \vec{r}_i^2(t) \rangle = D(1 - e^{-t/\tau_0})$

qui s'intègre en  $\langle \vec{r}_i^2(t) \rangle = \langle \vec{r}_i^2(0) \rangle + 2D(t - \underbrace{[ze^{-t/\tau_0}]_0}_{-z(e^{-t/\tau_0} - 1)})$

Il est raisonnable de prendre toutes les réalisations partant de l'origine  $\vec{r}_i(0) = \vec{0} \Rightarrow \langle \vec{r}_i^2(0) \rangle = 0$  si bien que

$$\boxed{\langle \vec{r}_i^2(t) \rangle = 2D[t + z(e^{-t/\tau_0} - 1)]}$$

8.  $\langle \vec{r}_i^2(t) \rangle$  représente l'écart-quadratique ou dispersion du mouvement. C'est le carré de la distance typique parcourue  $R(t)$ .

à  $t \ll \tau_0$ :  $e^{-t/\tau_0} \approx 1 - \frac{t}{\tau_0}$  et  $\langle \vec{r}_i^2(t) \rangle \approx 2D[t + z(1 - \frac{t}{\tau_0} - \frac{t}{2}) + \frac{1}{2}(\frac{t}{\tau_0})^2] + z \frac{1}{2}(\frac{t}{\tau_0})^2]$

soit

$$\boxed{\langle \vec{r}_i^2(t) \rangle \approx \frac{D}{2} t^2}$$

soit

$$\boxed{R(t) \approx \sqrt{\frac{D}{2}} t} \quad \begin{array}{l} \text{ballistique} \\ (\text{linéaire avec } t) \end{array}$$

et  $\boxed{\frac{D}{2} = \frac{3k_B T}{m}}$

à  $t \gg \tau_0$ :

$e^{-t/\tau_0} \approx 0$  et  $t \gg (-z)$  donc

$$\boxed{\langle \vec{r}_i^2(t) \rangle \approx 2Dt}$$

dans ce cas

$$\boxed{R(t) \approx \sqrt{2Dt}}$$

diffusif

D: coefficient  
de diffusion.

9. Dans les expériences, on observe bien les deux régimes lors que

$\frac{\Delta \vec{r}_i^2}{2Dt} \rightsquigarrow$  constante lorsque  $t \gg \tau_0$   
(figure de gauche)

$\frac{\Delta \vec{r}_i^2}{\frac{k_B T}{m} t^2} \rightsquigarrow$  constante pour  $t \ll \tau_0$   
(à droite)

10. Théorème d'équipartition:  $\langle \frac{1}{2} m \vec{v}^2 \rangle = 3 - \frac{k_B T}{2}$  soit  $\boxed{\langle \vec{v}^2 \rangle = \frac{3k_B T}{m}}$   
à l'équilibre.