

Correction partie TMS  
2 avril 2013

Pression osmotique  
questions de cours

1. espace des phases: ensemble des points  $(\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_N, \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_N)$

dimension:  $6N$ . Hamiltonien:  $\mathcal{H}(\vec{q}_1, \dots, \vec{p}_N) = \sum_{i=1}^N \frac{\vec{p}_i^2}{2m}$

variables macroscopiques

$$\Omega(E, V, N) = \frac{1}{h^{3N} N!} \int \dots \int d\vec{q}_1 \dots d\vec{p}_N$$

volume élémentaire  
 d'une cellule  
 élémentaire  
 contenant l'état

$E \leq \mathcal{H} \leq E + \delta E$  de l'espace des phases  
 indisponibilité

volume  
 élémentaire  
 autour de la  
 surface d'énergie  
 constante

3. La contrainte  $E \leq \mathcal{H} \leq E + \delta E$  n'agit que sur les  $\{\vec{p}_i\}$  pour le gaz parfait. Les intégrales sur les positions donnent le volume:

$$\int \dots \int d\vec{q}_1 \dots d\vec{p}_N = (\int d\vec{q}_1) \dots (\int d\vec{q}_N) = V^N$$

d'où

$$\Omega(E, V, N) = \frac{V^N}{N!} \Omega_c(E, N)$$

avec  $\Omega_c(E, N) = \int \dots \int d\vec{p}_1 \dots d\vec{p}_N$

4. formule de Boltzmann:  $S = k_B \ln \Omega$

pression:  $\frac{P}{T} = \left( \frac{\partial S}{\partial V} \right)_{N, E}$

pression osmotique

5. la membrane est perméable au solvant donc les molécules du solvant explore tout le volume  $V$ .

$$\Omega_i = \frac{V^N}{N!} \Omega_{c,i} S \quad \text{et} \quad V = V_1 + V_2$$

6. on prend  $\frac{P_1}{T} = \left( \frac{\partial S_i}{\partial V_1} \right)_{N, E_i}$  avec  $S_i = k_B \ln \Omega_i$

d'où  $\frac{P_1}{T} = k_B \frac{\partial}{\partial V_1} (N \ln(V_1 + V_2)) = \frac{N k_B}{V_1 + V_2} = \frac{N k_B}{V} = \left( \frac{N k_B}{V_1} \right)$

de même  $\frac{P_2}{T} = k_B \frac{\partial}{\partial V_2} (N \ln(V_1 + V_2)) = \frac{N k_B}{V_2} = \frac{P_1}{T} = \left( \frac{N_2 k_B}{V_2} \right)$

7.  $\Omega_f = \frac{V^N}{N!} \Omega_{c,S} \times \frac{V_1^{N_1}}{N_1!} \Omega_{c,1}$  et  $S_f = k_B \ln \Omega_f$

8. et  $\frac{P_1}{T} = \frac{\partial S_f}{\partial V_1} = N \frac{\partial \ln(V_1 + V_2)}{\partial V_1} + N_1 \frac{\partial \ln V_1}{\partial V_1}$

soit  $P_1 = \frac{N k_B T}{V} + N_1 \frac{k_B T}{V_1}$

pour  $P_2$ , le calcul n'a pas changé:  $P_2 = \frac{N k_B T}{V}$

ainsi  $\Delta P = P_1 - P_2 = N_1 \frac{k_B T}{V_1}$  pression osmotique.

9.  $\Omega_i = \frac{V_{1,i}^{N_1}}{N_1!} \frac{V_{2,i}^{N_2}}{N_2!} \Omega_{c,S}(E_1, N_1) \Omega_{c,S}(E - E_1, N_2)$ ,  $\begin{cases} E_1 + E_2 = E \\ V_1 + V_2 = V \end{cases}$

égalité des pressions:

$$P_1 = T \frac{\partial S_1}{\partial V_1} \quad P_2 = T \frac{\partial S_2}{\partial V_2} \quad \text{et} \quad S_i = k_B \ln \Omega_i = S_1 + S_2$$

entropie maximale /  $V_2$  à l'équilibre  $\frac{\partial S_i}{\partial V_1} = 0 = \frac{\partial S_1}{\partial V_1} + \frac{\partial V_2}{\partial V_1} \frac{\partial S_2}{\partial V_2}$

d'où

$$p_{1,i} = p_{2,i}$$

par le calcul :  $p_1 = T \frac{\partial S_i}{\partial V_1} = \frac{N_1 k_B T}{V_{1,i}}$  et  $p_2 = \frac{N_2 k_B T}{V_{2,i}}$

d'où

$$\frac{N_1}{V_{1,i}} = \frac{N_2}{V_{2,i}}$$

volumes initiaux

10. après ajout du soluté :

$$\Omega_f = \frac{V_{1,f}^{N_1}}{N_1!} \frac{V_{2,f}^{N_2}}{N_2!} \frac{V_{s,f}^{N_s}}{N_s!} \Omega_{c,S}(E_1, N_1) \Omega_{c,S}(E_2, N_2) \Omega_{c,S}(E_s, N_s)$$

et  $V_{1,f} + V_{2,f} = V$

pression à gauche :

$$p_{1,f} = T \frac{\partial S_f}{\partial V_1} = T \left( \frac{N_1 k_B}{V_{1,f}} + \frac{N_s k_B}{V_{s,f}} \right) = \frac{(N_1 + N_s) k_B T}{V_{1,f}}$$

à droite :

$$p_{2,f} = T \frac{\partial S_f}{\partial V_2} = T \frac{N_2 k_B}{V_{2,f}} = p_{1,f}$$

à l'équilibre

11. Le soluté induit une suppression donc la paroi va se déplacer vers la droite :  $V_{1,f} > V_{1,i}$ .

différence de volume :

$$\Delta V_1 = V_{1,f} - V_{1,i} = ?$$

on écrit  $(N_1 + N_s) V_{2,f} = N_2 V_{1,f} \Leftrightarrow V_{1,f} = \frac{N_1 + N_s}{N_1 + N_2 + N_s} V$

de même

$$N_1 V_{2,i} = N_2 V_{1,i} \Leftrightarrow V_{1,i} = \frac{N_1}{N_1 + N_2} V$$

d'où

$$\Delta V_1 = V \left\{ \frac{N_1 + N_s}{N_1 + N_2 + N_s} - \frac{N_1}{N_1 + N_2} \right\}$$

dans la limite  $N_s \ll N_1, N_2$ ,  $\frac{N_1 + N_s}{N_1 + N_2 + N_s} \approx \frac{N_1}{N_1 + N_2} \frac{1 + N_s/N_1}{1 + N_s/(N_1 + N_2)}$

$$\approx \frac{N_1}{N_1 + N_2} \left\{ 1 + \frac{N_s}{N_1} \right\} \left\{ 1 - \frac{N_s}{N_1 + N_2} \right\}$$

d'où  $\Delta V_1 \approx V \frac{N_1}{N_1 + N_2} \left( 1 + N_s \left( \frac{1}{N_1} - \frac{1}{N_1 + N_2} \right) - 1 \right)$

$$\Delta V_1 \approx V \frac{N_2}{N_1 + N_2} \frac{N_s}{N_1 + N_2} > 0$$

la concentration en soluté est  $c_s = \frac{N_s}{V_{1,f}}$  (à l'état final)

comme  $\Delta V_1 \ll V_{1,i}$  si  $N_s \ll N_1, N_2$ , on aura

$$c_s \approx \frac{N_s}{V_{1,i}}$$
 car  $V_{1,f} \approx V_{1,i}$ .

De plus,  $\frac{N_2}{N_1 + N_2} = \frac{V_{2,i}}{V}$  et  $\frac{N_1}{N_1 + N_2} = \frac{V_{1,i}}{V} \Rightarrow \Delta V_1 \approx V \frac{V_{2,i} - V_{1,i}}{V} \frac{N_s}{N_1 + N_2}$

d'où  $N_s = N_1 \left( \frac{V_{2,i} - V_{1,i}}{V \Delta V_1} \right)^{-1}$

et  $c_s \approx \frac{N_1}{V_{1,i}} \left( \frac{V}{V_{1,i} - V_{2,i}} \right) \Delta V_1$  et  $V = V_{1,i} + V_{2,i}$

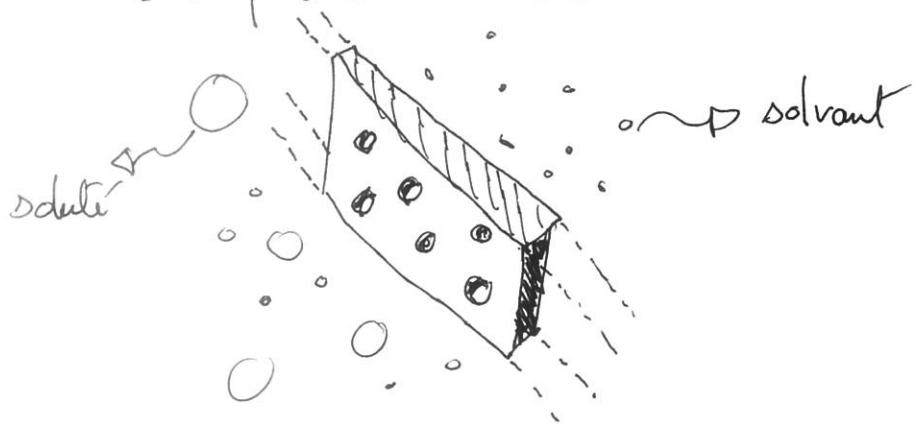
$$\frac{N_1}{V_{1,i}} = \frac{p_{1,i}}{k_B T} \text{ plus facile à mesurer}$$

soit

$$c_s \approx \frac{p_{1,i}}{k_B T} \left( \frac{1}{V_{1,i}} + \frac{1}{V_{2,i}} \right) \Delta V_1$$

## Commentaires additionnels sur la question 6.

- une membrane semi-perméable peut être imaginée comme une membrane percée de trous suffisamment petits pour empêcher le soluté de passer mais assez grands pour laisser passer le solvant.



du point de vue thermodynamique, lorsqu'il n'y a que du solvant, la position de la membrane ne joue aucun rôle, la membrane n'impose aucune contrainte donc  $S_i$  ne doit pas dépendre de  $V_1$ . C'est bien le cas, elle ne dépend que de  $V$  qui est indépendant de  $V_1$ .

Cependant, on s'attend physiquement à ce que la membrane subisse une pression due aux chocs des particules à gauche et à droite sur les "parties pleines" de la membrane.

On a fait apparaître formellement les pressions  $p_1$  et  $p_2$  en effectuant les dérivées /  $V_1$  et  $V_2$  ce qui est simple à effectuer et on trouve  $p_1 = p_2 = \frac{N}{V} k_B T$

Une manière plus correcte de voir les choses est d'écrire  $V = V_1 + V - V_1$  et de dire que  $S_i$  ne dépend pas de  $V_1$  de sorte que :

$$\begin{aligned}\frac{\partial S_i}{\partial V_1} &= 0 = N \frac{\partial}{\partial V_1} \ln(V_1 + V - V_1) \\ &= N k_B \left( \frac{\frac{\partial}{\partial V_1} (V_1 + V - V_1)}{V_1 + V - V_1} \right) \\ &= N k_B \left( \frac{1}{V} - \frac{1}{V} \right)\end{aligned}$$

chacun des termes qui se compensent correspond à  $p_1$  et  $p_2$  :  $0 = p_1 - p_2$

Comme le fluide est homogène et explore tout l'espace, sa pression (quantité intensive) est la même partout, mais elle n'est pas nulle <sup>et agit</sup> sur la membrane.

## Polymerisation de filaments d'Actine

### Equations d'évolution des populations:

1. Plus on a de monomères au voisinage d'une extrémité, plus la probabilité d'en accrocher un est grande  $\rightarrow p_+ \propto c$ . Pour le décrochage, en revanche, le processus n'est pas proportionnel à  $c$ .  
l'accréation est privilégiée si  $p_+ > p_-$   
soit  $k_+ c > k_-$  ou  $[c > c^*]$ .

2. Bilan de la population  $N_m$  entre  $t$  et  $t+dt$ :

$$N_m(t+dt) = N_m(t) + \underbrace{p_+ N_{m-1}(t)}_{\text{accrétion de } N_{m-1}} + \underbrace{p_- N_{m+1}(t)}_{\text{croissance } m+1 \rightarrow m} - \underbrace{p_+ N_m(t)}_{m \rightarrow m+1} - \underbrace{p_- N_m(t)}_{m \rightarrow m-1}$$

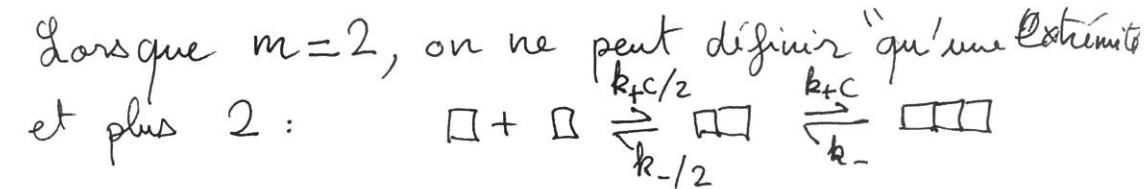
d'où, en utilisant  $N_m(t+dt) \approx N_m(t) + \frac{dN_m}{dt} dt$   
et  $p_+ = k_+ c dt$ ;  $p_- = k_- dt$ ,

$$\frac{dN_m}{dt} = k_+ c N_{m-1} - (k_+ c + k_-) N_m + k_- N_{m+1}$$

3. Comme  $c = \frac{N_1}{V}$  est maintenue constante

$$N_1 = \text{cste} \Rightarrow \frac{dN_1}{dt} = 0$$

pour  $N_2$ , il faut considérer les processus de formation des dimères  $\square \rightarrow \square\square$ :  
 $\square\square \rightarrow \square + \square$  destruction etc..



donc les processus associés au monomère ont une probabilité 2 fois plus petite :  $\frac{k_{+c}/2}{k_{-1/2}}$   
d'où :

$$\frac{dN_2}{dt} = \frac{k_+ c}{2} N_1 - \left( k_+ c + \frac{k_-}{2} \right) N_2 + k_- N_3$$

### Description continue des régimes de polymerisation:

$$N(x, t) \equiv N_m(t)$$

$$4. \quad \frac{dN_m}{dt} = \frac{\partial N}{\partial t} \text{ et}$$

$$k_+ c N_{m-1} - (k_+ c + k_-) N_m + k_- N_{m+1} = k_+ c \left( N(x, t) - \frac{\partial N}{\partial x} a + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} \right) - (k_+ c + k_-) N(x, t) + k_- \left( N(x, t) + \frac{\partial N}{\partial x} a + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} \right)$$

$$= \underbrace{\frac{a^2}{2} (k_+ c + k_-) \frac{\partial^2 N}{\partial x^2}}_D - \underbrace{a (k_+ c - k_-) \frac{\partial N}{\partial x}}_v$$

en utilisant  $k_- = c^* k_+$

$$D = \frac{k_+}{2} (c + c^*) a^2 \quad v = a k_+ (c - c^*)$$

5. changement de référentiel:  $\begin{cases} x \rightarrow x' = x - vt \\ t \rightarrow t' = t \end{cases}$

d'où  $\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial x'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial t'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t'} = \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial x'} \text{ et } \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x'^2} \\ \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial x'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial t'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t'} = -v \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t'} \end{cases}$

d'où  $-v \frac{\partial N}{\partial x'} + \frac{\partial N}{\partial t'} = D \frac{\partial^2 N}{\partial x'^2} - v \frac{\partial N}{\partial x'}$

on obtient une équation de Diffusion:  $\boxed{\frac{\partial N}{\partial t'} = D \frac{\partial^2 N}{\partial x'^2}}$

D est le coefficient de diffusion.

6. La condition initiale pour  $N(x', t')$  est

$$N(x', t'=0) = N_i \delta(x' - x_0) \text{ car } x' = x \text{ à } t=0$$

Vérifions que  $N(x, t)$  est la solution correspondante à cette condition initiale. D'après le formulaire

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi D t}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2D t}} = \delta(x - x_0)$$

or ici,  $N(x', t)$  est une gaussienne de largeur

$$\sigma(t) = \sqrt{2Dt} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0 \text{ et multiplié par } N_i \text{ et centré sur } x_0 :$$

donc  $N(x', t=0) = N_i \delta(x' - x_0)$

Ensuite:  $\frac{\partial N}{\partial t'} = N_i \left\{ \frac{-1/2}{\sqrt{4\pi D t'} t'^{3/2}} + \frac{(x'-x_0)^2}{4Dt'^2} \right\} e^{-\frac{(x'-x_0)^2}{4Dt'}}$

et  $\frac{\partial N}{\partial x'} = \frac{N_i}{\sqrt{4\pi D t'}} \left( -\frac{x'-x_0}{2Dt'} \right) e^{-\frac{(x'-x_0)^2}{4Dt'}}$

$$\frac{\partial^2 N}{\partial x'^2} = \frac{N_i}{\sqrt{4\pi D t'}} \left\{ -\frac{1}{2Dt'} + \frac{(x'-x_0)^2}{(2Dt')^2} \right\} e^{-\frac{(x'-x_0)^2}{4Dt'}}$$

d'où  $-\frac{1}{2Dt'} + \frac{(x'-x_0)^2}{4Dt'^2} = D \left( -\frac{1}{2Dt'} + \frac{(x'-x_0)^2}{4D^2 t'^2} \right)$

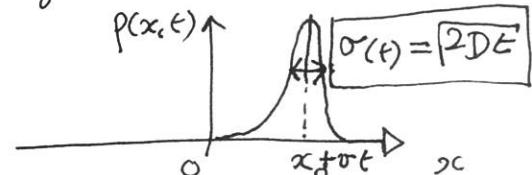
il y a bien égalité donc la forme donnée par l'énoncé est bien solution.

On écrivant  $\begin{cases} x = x' + vt \\ t = t' \end{cases}$  on obtient:

$$\boxed{N(x, t) = \frac{N_i}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{(x-(x_0+vt))^2}{4Dt}}}$$

7.  $\langle x \rangle = \int dx p(x, t) x$  avec ici  $p(x, t) = \frac{N(x, t)}{N_i}$

et tant que  $x \gg \Delta x \approx \sqrt{2Dt}$ , on peut étendre les bornes d'intégration à  $\pm \infty$ . L'allure de  $p(x, t)$  est



d'où  $\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{1}{\sqrt{2\sigma^2(t)}} x e^{-\frac{(x-(x_0+vt))^2}{2\sigma^2(t)}} = \frac{x_0 + vt}{\sqrt{2\sigma^2(t)}}$

$y = x - (x_0 + vt)$   
et intégrale d'une fonction impaire = 0

pour l'écart-type, on reconnaît la gaussienne  
ou on utilise le formulaire: (kt changement)  
de variable(s)

$$\Delta x(t) = \sqrt{2Dt}$$

ou encore

$$x_{eff} = x_0 + a k_+ (c - c^*) t$$

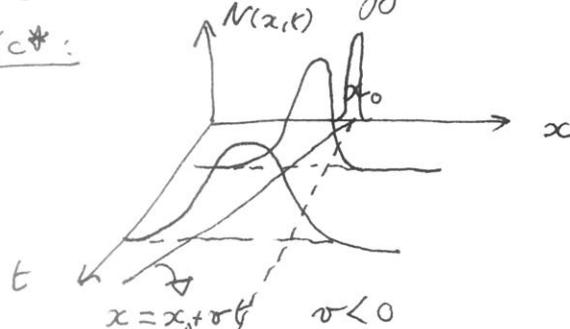
$$\Delta x(t) = \sqrt{a^2 k_+ (c + c^*) t}$$

8. on a trois régimes:

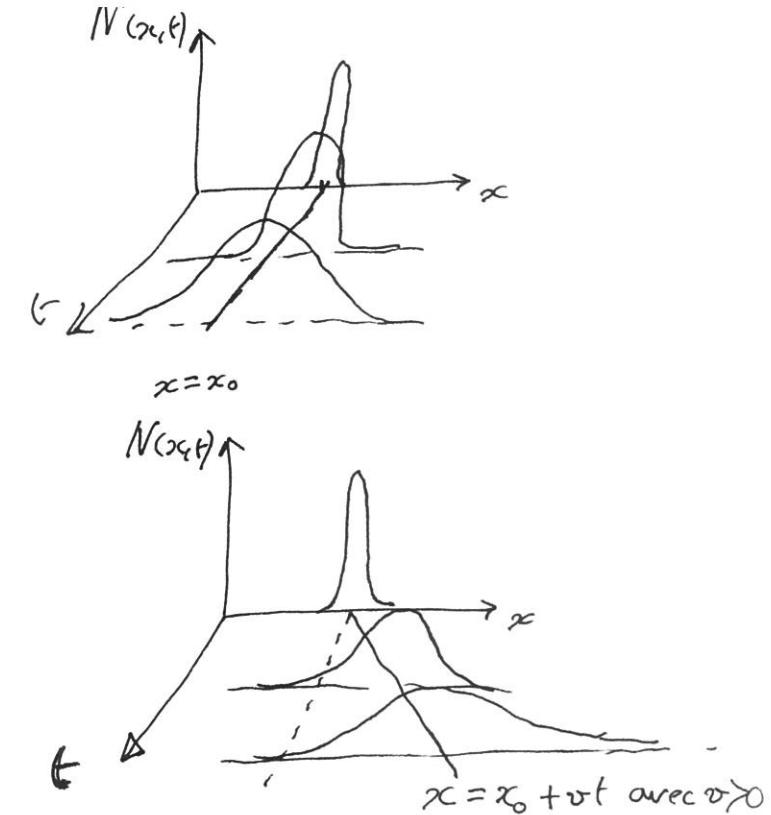
- si  $c < c^*$ : la taille moyenne des polymères diminue  $\rightarrow$  dépolymerisation
- si  $c = c^*$ : elle ne bouge pas
- si  $c > c^*$ : la taille moyenne augmente à la vitesse  $v$   $\rightarrow$  polymérisation.

Dans tous les cas, la dispersion des longueurs, caractérisée par  $\Delta x(t)$  augmente avec le temps à cause de la diffusion.

si  $c < c^*$ :



si  $c = c^*$ :



Limites du modèle:

- si  $v > 0$ , les polymères ne peuvent croître indéfiniment  $\Rightarrow$  l'hypothèse  $c = c^*$  et la taille du récipient vont devoir être remis en cause pour la première et prise en compte pour la seconde.
- si  $v < 0$ , on va atteindre  $x = 0$  pour  $t = \frac{x_0}{v}$  donc il faudra prendre en compte ce qu'il se passe à  $x = 0$  etc...

9. lorsque  $c > c^*$ , on peut dire que  $v$  est la vitesse de polymérisation.

$$\text{AN: } c^* = \frac{k_-}{k_+} = \frac{1}{10} \quad \mu\text{Mole.L}^{-1} = 0,1 \mu\text{Mole L}^{-1}$$

$$v = a k_+ \quad c^* = a k_- = 5 \cdot 10^{-9} \text{ m s}^{-1} = 1,8 \cdot 10^{-5} \text{ m h}^{-1}$$

on connait  $1s = \frac{1}{3600} h$

$$v \approx 0,2 \mu\text{m h}^{-1}$$

Solution stationnaire en-dessous de la concentration critique:

$$10. \text{ On a alors } 0 = D \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial N}{\partial x} \text{ soit}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial N}{\partial x} \right) = \frac{\nu}{D} \frac{\partial N}{\partial x} \text{ qui se résoud en notant } N'(x) = \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$\ln \left( \frac{N'(x)}{N'(0)} \right) = \frac{\nu}{D} x \quad \text{et} \quad N'(0) = G$$

donc

$$\left( \frac{\partial N}{\partial x} \right)_{(x)} = G e^{\nu x / D} = G e^{-x / \xi_c}$$

$$\text{avec } \xi_c = -\frac{D}{\nu} > 0 \quad \text{car } \nu < 0 \text{ puisque } c < c^*$$

qui se résout

$$\xi_c = \frac{a}{2} \frac{c + c^*}{c^* - c}$$

11. lorsque  $m > 3$  et  $\frac{dN_m}{dt} = 0$ , on obtient

$$k_+ c N_{m-1} - (k_+ c + k_-) N_m + k_- N_{m+1} = 0$$

12. posons  $N_m = K r^m$ , alors en utilisant  $k_- = k_+ c^*$ , on a

$$c r^{m-1} - (c + c^*) r^m + c^* r^{m+1} = 0$$

$$\text{ou } c^* r^2 - (c + c^*) r + c = 0$$

$$\text{racines: } \Delta = (c + c^*)^2 - 4 c c^* = (c - c^*)^2 > 0$$

$$r_{\pm} = \frac{1}{2c^*} \left[ c + c^* \pm \sqrt{\Delta} \right] = \begin{cases} r_4 = \frac{c}{c^*} (+) \\ r_1 = 1 (-) \end{cases}$$

si  $r_1 = 1 \Rightarrow N_m = K$ ,  $K \in \mathbb{R}$  donc il y a une infinité de monomères  $\Rightarrow$  pas physique.  
 $\hookrightarrow \sum_{m=1}^{\infty} m N_m = \infty \Rightarrow$  on garde  $r = \frac{c}{c^*} < 1$

$$13. \text{ on a } \frac{dN_2}{dt} = 0 \text{ donc, comme } N_1 = c V \text{ et } N_2 = K \left( \frac{c}{c^*} \right)^2$$

$$\frac{k_+ c}{2} c V - k_+ \left( c + \frac{c^*}{2} \right) N_2 + k_+ c^* K \left( \frac{c}{c^*} \right)^3 = 0$$

$$\text{d'où } K \frac{c^3}{c^*^2} + \frac{c^2}{2} V = \left( c + \frac{c^*}{2} \right) N_2$$

14. On a aussi  $\frac{dN_1}{dt} = 0$ . Or  $\frac{dN_1}{dt}$  a les contributions suivantes:

$$\frac{dN_1}{dt} = 0 = \underbrace{k_- \sum_{m \geq 3} N_m}_{\text{monomères venant des décrochages}} + \underbrace{\frac{k_+ c}{2} N_2}_{\text{monomères qui accrochent}} - \underbrace{(k_+ c \sum_{m \geq 2} N_m + \frac{k_+ c}{2} N_1)}_{\text{monomères qui accrochent}}$$

d'où

$$\sum_{m \geq 3} (k_- - k_+ c) N_m - k_+ c N_2 + \frac{k_-}{2} N_2 - \frac{k_+ c}{2} N_1 = 0$$

ou, avec  $k_- = c^* k_+$

$$(c^* - c) K \underbrace{\sum_{m=3}^{\infty} r^m}_{-(c - \frac{c^*}{2}) N_2 - \frac{c^2}{2} V = 0}$$

formulation:  $\frac{r^3}{1-r} = \left(\frac{c}{c^*}\right)^3 \frac{c^*}{c-c^*}$  car  $r = c/c^*$

d'où

$$K \frac{c^3}{c^{*2}} = \frac{c^2}{2} V + \left(c - \frac{c^*}{2}\right) N_2$$

15. À l'aide des deux équations, on peut déterminer les deux inconnues  $K$  et  $N_2$ :

on a:  $\frac{c^2}{2} V + \left(c - \frac{c^*}{2}\right) N_2 = \left(c + \frac{c^*}{2}\right) N_2 - \frac{c^2}{2} V$

donc

$$N_2 = V \frac{c^2}{c^*} = V c^* \left(\frac{c}{c^*}\right)^2$$

on en déduit:  $K = \frac{c^{*2}}{c^3} \left\{ \frac{c^2}{2} + c^* \left(c - \frac{c^*}{2}\right) \right\} V$

$$K = V c^* \quad \text{d'où } N_2 = K r^2$$

et on a que  $N_1 = c V = V c^* \left(\frac{c}{c^*}\right)^1 = K r^1$

⇒ tous les  $N_m$  ont la forme:  $N_m = V c^* \left(\frac{c}{c^*}\right)^m$

on peut mettre cela sous la forme

$$\left(\frac{c}{c^*}\right)^m = e^{m \ln \frac{c}{c^*}} = e^{-ma/\xi_d}$$

avec

$$\xi_d = \frac{a}{\ln\left(\frac{c}{c^*}\right)} > 0 \quad \text{car } \frac{c}{c^*} > 1$$

16. Dans la limite  $c \rightarrow c^*$ ,  $c = c^*(1-\varepsilon)$ ,  $0 < \varepsilon \ll 1$

$$\varepsilon = \frac{c^* - c}{c^*}$$

on a  $\xi_c \approx \frac{a}{2} \frac{2c^* + \varepsilon(-c^*)}{c^* \varepsilon} \approx \frac{a}{\varepsilon} \approx \frac{ac^*}{c^* - c}$

$$\xi_d = \frac{a}{\ln(1/(1-\varepsilon))} \approx \frac{a}{-\ln(1-\varepsilon)} \approx \frac{a}{\varepsilon} \approx \xi_c$$

$\xi_c$  et  $\xi_d$  ont le même comportement et divergent lorsque  $c \rightarrow c^*$  comme  $\frac{1}{c^*-c}$ .

17. longueur moyenne:  $L_m = ma$  pour un filament avec  $m$  monomères

d'où  $\langle L \rangle = a \frac{\sum_{m=1}^{\infty} m N_m}{\sum_{m=1}^{\infty} N_m} = a \frac{\sum_{m=1}^{\infty} m r^m}{\sum_{m=1}^{\infty} r^m} = \frac{r}{1-r}$  d'après le formulaire

et posons  $f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} (rx)^m = \frac{rx}{1-rx} = \frac{1}{1-rx} - 1$

on voit que  $f'(x) = \sum_{m=1}^{\infty} m r^m x^{m-1}$  d'où  $\sum_{m=1}^{\infty} m r^m = f'(1) = \frac{r}{(1-r)^2}$

Au final:

$$\langle L \rangle = \frac{ac^*}{c^* - c}$$



A.N:  $c = 0,99c^* \Rightarrow \langle L \rangle \approx 100a \approx 0,5 \mu\text{m}$