# Examen décembre 2014

## Relation d'incertitude de Heisenberg

**1.** $[\hat{A}', \hat{B}'] = [\hat{A}-\langle\hat{A}\rangle, \hat{B}-\langle\hat{B}\rangle] = (\hat{A}-\langle\hat{A}\rangle)(\hat{B}-\langle\hat{B}\rangle) - (\hat{B}-\langle\hat{B}\rangle)(\hat{A}-\langle\hat{A}\rangle)$

$$= \hat{A}\hat{B} - \cancel{\langle\hat{A}\rangle\hat{B}} + \cancel{\langle\hat{A}\rangle\langle\hat{B}\rangle} - \cancel{\langle\hat{B}\rangle\hat{A}} - \hat{B}\hat{A} + \cancel{\langle\hat{B}\rangle\hat{A}} - \cancel{\langle\hat{A}\rangle\hat{B}} - \cancel{\langle\hat{A}\rangle\langle\hat{B}\rangle}$$

$$\boxed{[\hat{A}', \hat{B}'] = [\hat{A}, \hat{B}]}$$

- $(i[\hat{A}', \hat{B}'])^\dagger = -i(\hat{A}'\hat{B}' - \hat{B}'\hat{A}')^\dagger = -i(\hat{B}'^\dagger\hat{A}'^\dagger - \hat{A}'^\dagger\hat{B}'^\dagger)$

or $\hat{A}'$ et $\hat{B}'$ sont hermitiques $= -i(\hat{B}'\hat{A}' - \hat{A}'\hat{B}')$
$= i(\hat{A}'\hat{B}' - \hat{B}'\hat{A}')$
$= i[\hat{A}', \hat{B}']$

donc $i[\hat{A}', \hat{B}']$ est hermitique

**2.** soit $P(x) = \| (\hat{A}' + ix\hat{B}')|\psi\rangle \|^2$

et $\hat{A}'^\dagger = \hat{A}'$, $\hat{B}'^\dagger = \hat{B}'$

$$= \langle\psi|(\hat{A}'^\dagger - ix\hat{B}'^\dagger)(\hat{A}' + ix\hat{B}')|\psi\rangle$$

$$= \langle\psi|\hat{A}'^2 + x^2\hat{B}'^2 + ix(\hat{A}'\hat{B}' - \hat{B}'\hat{A}')|\psi\rangle$$

$$= \underbrace{\langle\psi|\hat{A}'^2|\psi\rangle}_{\Delta\hat{A}^2} + x\langle\psi|i[\hat{A}', \hat{B}']|\psi\rangle + x^2\underbrace{\langle\psi|\hat{B}'^2|\psi\rangle}_{\Delta\hat{B}^2}$$

or, comme $P(x)$ est une norme $P(x) \geq 0, \forall x$.

**3.** donc le discriminant doit être $\leq 0$. De plus

$\langle\psi|i[\hat{A}', \hat{B}']|\psi\rangle$ est réel car $i[\hat{A}', \hat{B}']$ est hermitique

et $\langle\psi|i[\hat{A}', \hat{B}']|\psi\rangle = \langle\psi|i[\hat{A}, \hat{B}]|\psi\rangle$ d'où

$$(\langle\psi|i[\hat{A}, \hat{B}]|\psi\rangle)^2 - 4\Delta\hat{A}^2\Delta\hat{B}^2 \leq 0$$

$(\langle\psi|i[\hat{A}, \hat{B}]|\psi\rangle)^2 = |\langle\psi|[\hat{A}, \hat{B}]|\psi\rangle|^2$ $\Rightarrow$ $\boxed{\Delta\hat{A}\Delta\hat{B} \geq \frac{|\langle\psi|[\hat{A}, \hat{B}]|\psi\rangle|}{2}}$

**4.** Equation de Schrödinger :

$\boxed{i\hbar\frac{\partial|\psi\rangle}{\partial t} = \hat{H}|\psi\rangle}$ et $-i\hbar\frac{\partial\langle\psi|}{\partial t} = \langle\psi|\hat{H}$ car $\hat{H}^\dagger = \hat{H}$

**5.** $\frac{d}{dt}\langle\hat{A}\rangle = \frac{d}{dt}\langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle = \frac{d\langle\psi|}{dt}\hat{A}|\psi\rangle + \langle\psi|\hat{A}\frac{d|\psi\rangle}{dt}$

$$= -\frac{1}{i\hbar}\langle\psi|\hat{H}\hat{A}|\psi\rangle + \frac{1}{i\hbar}\langle\psi|\hat{A}\hat{H}|\psi\rangle$$

$$\boxed{\frac{d\langle\hat{A}\rangle}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\langle\psi|[\hat{A}, \hat{H}]|\psi\rangle}$$

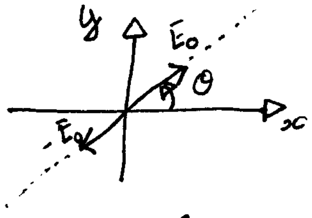
**6.** on prend $\hat{B} = \hat{H} \Rightarrow \Delta\hat{A}\Delta\hat{H} \geq \frac{|\langle[\hat{A}, \hat{H}]\rangle|}{2} = \frac{\hbar}{2}\left|\frac{d\langle\hat{A}\rangle}{dt}\right|$

et $\boxed{\tau\Delta\hat{H} \geq \hbar/2}$

**7.** pour un état stationnaire, $\Delta\hat{H} = 0$ donc $\tau = \infty$, pas d'évolution

# Polarisation des photons

**1.** $\vec{E} = E_0 \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \underbrace{\cos(\omega t - kz)}_{\in [-1,1]}$




$\vec{E}$ est toujours // axe fixe faisant un angle $\theta$ avec $Ox$. Sa pointe parcours les points entre $-E_0$ et $E_0$ le long de cet axe $\Rightarrow$ polarisation linéaire (selon une droite).

**2. a.** le polariseur ne laisse passer que la composante selon $Ox$, si $|\psi\rangle = a|x\rangle + b|y\rangle$ est un vecteur incident $\hat{P}_x$ doit aligner $|\psi\rangle$ selon $|x\rangle$ et mettre un poids $= 0$ sur $|y\rangle$ soit

$$\boxed{\hat{P}_x = |x\rangle\langle x| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

**b.** $\hat{P}_x$ est sous forme diagonale, ses valeurs propres sont 1 associée à $|x\rangle$ et 0 associée à $|y\rangle$. Les résultats possibles sont les valeurs propres de $\hat{P}_x$ :
- 1 : le photon passe
- 0 : le photon ne passe pas

**c.** On a $\boxed{p = |\langle\theta|x\rangle|^2} = |(\cos\theta\langle x| + \sin\theta\langle y|)|x\rangle|^2$ $\quad\cos\langle x|y\rangle = 0$

$$\boxed{p = \cos^2\theta}$$

**d.** En sortie du polariseur, si le photon est passé, il est dans l'état $|x\rangle$ associé à 1.

**3.a** le polariseur ne va conserver que la composante selon $\vec{u}_\alpha = \cos\alpha\,\vec{e}_x + \sin\alpha\,\vec{e}_y$, il projète donc l'état du photon sur $|\alpha\rangle = \cos\alpha|x\rangle + \sin\alpha|y\rangle$

soit $\boxed{\hat{P}_\alpha = |\alpha\rangle\langle\alpha|}$

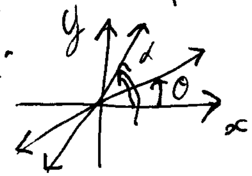
**b.** On écrit $\hat{P}_\alpha = (\cos\alpha|x\rangle + \sin\alpha|y\rangle)(\cos\alpha\langle x| + \sin\alpha\langle y|)$

$$= \cos^2\alpha|x\rangle\langle x| + \cos\alpha\sin\alpha(|x\rangle\langle y| + |y\rangle\langle x|) + \sin^2\alpha|y\rangle\langle y|$$

$$\boxed{\hat{P}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos^2\alpha & \cos\alpha\sin\alpha \\ \cos\alpha\sin\alpha & \sin^2\alpha \end{pmatrix}}$$

**c.** Si le photon passe, l'état en sortie est $|\alpha\rangle$

**d.**




à la sortie du premier, le photon sort dans l'état $|\theta\rangle$. La probabilité pour qu'il passe le second est

$$p = |\langle\theta|\alpha\rangle|^2 = |(\cos\theta\langle x| + \sin\theta\langle y|)(\cos\alpha|x\rangle + \sin\alpha|y\rangle)|^2$$

$$\overset{\langle x|y\rangle = 0}{=} |\cos\theta\cos\alpha + \sin\theta\sin\alpha|^2 \quad \boxed{\text{loi de Malus}}$$

$$= |\cos(\alpha - \theta)|^2 \Rightarrow \boxed{p = \cos^2(\alpha - \theta)}$$

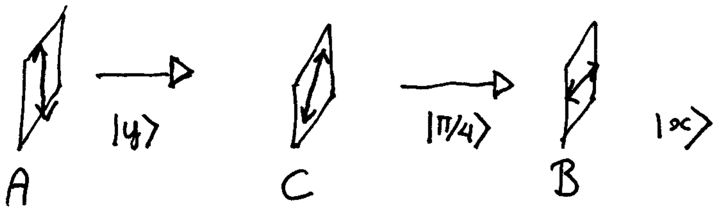
**4.** Relation de commutation $\quad [\hat{P}_x, \hat{P}_\alpha] = \hat{P}_x\hat{P}_\alpha - \hat{P}_\alpha\hat{P}_x$

$$\hat{P}_x\hat{P}_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos^2\alpha & \cos\alpha\sin\alpha \\ \cos\alpha\sin\alpha & \sin^2\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2\alpha & \cos\alpha\sin\alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{P}_\alpha\hat{P}_x = \begin{pmatrix} \cos^2\alpha & \cos\alpha\sin\alpha \\ \cos\alpha\sin\alpha & \sin^2\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2\alpha & 0 \\ \cos\alpha\sin\alpha & 0 \end{pmatrix}$$

d'où $\boxed{[\hat{P}_x, \hat{P}_\alpha] = \begin{pmatrix} 0 & +\cos\alpha\sin\alpha \\ -\cos\alpha\sin\alpha & 0 \end{pmatrix} = i\cos\alpha\sin\alpha\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}}$

5. on a la configuration :




En l'absence de C : $p = |\langle x|y\rangle|^2 = 0$ aucun photon ne passe.

En présence de C : $P_{\text{après } C} = |\langle \pi/4|y\rangle|^2 = \sin^2\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$

$P_{\text{après } B} = |\langle x|\pi/4\rangle|^2 = \cos^2\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$

la probabilité de passer C $\underline{\underline{\text{et}}}$ B est $p = P_{\text{après } C} \times P_{\text{après } B} = 1/4$

donc la fraction des photons qui passent est $\boxed{f = 25\%}$

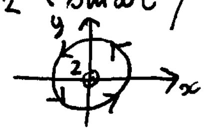
6. Pour que $\vec{E}$ décrive un cercle il faut que $E_x = E_y$ soit $\cos\theta = \sin\theta \Rightarrow \boxed{\theta = \pi/4}$ et donc $\sin\theta = \cos\theta = 1/\sqrt{2}$

Pour la dépendance temporelle, il faut quelque chose de la forme $\begin{pmatrix}\cos\Omega(t)\\ \pm\sin\Omega(t)\end{pmatrix}$ pour parcourir le cercle

comme $\cos\left(\Omega(t) \pm \frac{\pi}{2}\right) = \mp\sin\Omega(t)$, on prend $\delta = \pm\frac{\pi}{2}$

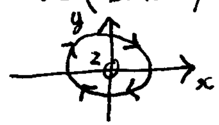
$\underline{\text{cas } \delta = +\pi/2 :}$ (à $z=0$)

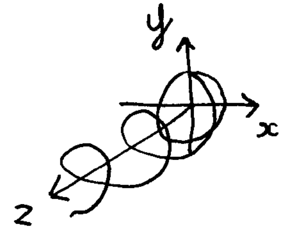
$\vec{E} = \frac{E_0}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\cos\omega t\\ \sin\omega t\end{pmatrix}$ $\underline{\underline{\text{Droit}}}$



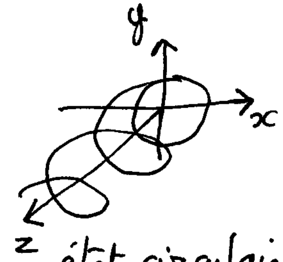

$\underline{\text{cas } \delta = -\pi/2}$ (à $z=0$)

$\vec{E} = \frac{E_0}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\cos\omega t\\ -\sin\omega t\end{pmatrix}$ $\underline{\underline{\text{Gauche}}}$




état circulaire gauche




état circulaire droit

7. on a $\sin\theta = \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $e^{\pm i\pi/2} = \pm i$ d'où

$$|G\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|x\rangle - i|y\rangle) \quad \text{et} \quad |D\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|x\rangle + i|y\rangle)$$

normalisation : $\langle G|G\rangle = \frac{1}{2}(1 + |i|^2) = 1$

$\langle D|D\rangle = \frac{1}{2}(1 + |i|^2) = 1$

produit scalaire $\langle G|D\rangle = \frac{1}{2}(\langle x| + i\langle y|)(|x\rangle + i|y\rangle)$

$= \frac{1}{2}(1 + \underbrace{i^2}_{=-1}) = 0$

donc $\{|D\rangle, |G\rangle\}$ est bien une base de états de polarisation.

8. le moment cinétique intervient dans la description du <u>mouvement de rotation</u> des objets.
On voit que les hélices associées aux états circulaires décrivent les deux mouvements possibles de la rotation du vecteur polarisation.

9. $\underline{\hat{J}_z|D\rangle} = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix} = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-i^2\\ i\end{pmatrix} = \hbar\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix} = \underline{\hbar|D\rangle}$

donc $|D\rangle$ est vecteur propre de $\hat{J}_z$ avec la valeur propre $\boxed{\hbar}$

$$\underline{\hat{J}_z|G\rangle} = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix} = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}i^2\\ +i^2\end{pmatrix} = -\hbar\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix} = \underline{-\hbar|G\rangle}$$

donc $|G\rangle$ est vecteur propre de $\hat{J}_z$ avec la valeur propre $\boxed{-\hbar}$

10. Forme diagonale ou décomposition spectre d'une observable $\hat{A}$ : $\hat{A} = \sum_\alpha \alpha |\alpha\rangle\langle\alpha|$ avec $\alpha$ valeurs propres, $|\alpha\rangle$ vecteurs propres

ici $$\boxed{\hat{J}_z = \hbar(|D\rangle\langle D| - |G\rangle\langle G|)}$$

11. D'après le cours : $$\boxed{\begin{aligned}\hat{J}_z|j,m\rangle &= \hbar m|j,m\rangle\\ \vec{\hat{J}}^2|j,m\rangle &= \hbar^2 j(j+1)|j,m\rangle\end{aligned}}$$

avec $m = -j, -j+1, \dots, j$ et $j$ entier ou demi-entier.

12. D'après les résultats précédents, $\pm\hbar$ correspondent aux valeurs $m = \pm 1$ donc le spin du photon est entier on a $j = 1$ (non demandé) si bien que

$$\boxed{|D\rangle = |1,1\rangle \quad \text{et} \quad |G\rangle = |1,-1\rangle}$$

13. On s'attendrait à avoir $\underline{m=0}$.

14. $\langle\theta|\hat{J}_z|\theta\rangle = \hbar(\langle\theta|D\rangle\langle D|\theta\rangle - \langle\theta|G\rangle\langle G|\theta\rangle)$

or $\langle\theta|D\rangle = (\cos\theta\langle x| + \sin\theta\langle y|)(|x\rangle + i|y\rangle)/\sqrt{2}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\theta + i\sin\theta) = \frac{e^{i\theta}}{\sqrt{2}}$$

$$\langle\theta|G\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\theta - i\sin\theta) = \frac{e^{-i\theta}}{\sqrt{2}}$$

d'où $\underline{\langle\theta|\hat{J}_z|\theta\rangle} = \hbar(|\langle\theta|D\rangle|^2 - |\langle\theta|G\rangle|^2) = \frac{\hbar}{2}(1-1) = \underline{0}$

Une polarisation rectiligne n'a pas de moment cinétique en moyenne (elle ne tourne pas) mais on peut la décomposer sur $|D\rangle$ et $|G\rangle$ selon

$$|\theta\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{-i\theta}|D\rangle + e^{i\theta}|G\rangle)$$

15. Comme $|D\rangle$ et $|G\rangle$ sont vecteurs propres de $\hat{J}_z$, on a $\hat{R}_\theta|D\rangle = e^{-i\theta\hat{J}_z/\hbar}|D\rangle = e^{-i\theta}|D\rangle$

$$\hat{R}_\theta|G\rangle = e^{-i\theta\hat{J}_z/\hbar}|G\rangle = e^{+i\theta}|G\rangle$$

donc $|D\rangle$ et $|G\rangle$ sont vecteurs propres de $\hat{R}_\theta$ avec les valeurs propres $e^{-i\theta}$ et $e^{+i\theta}$ d'où

$$\hat{R}_\theta = e^{-i\theta}|D\rangle\langle D| + e^{i\theta}|G\rangle\langle G|$$

on exprime ensuite $|D\rangle$ et $|G\rangle$ en fonction de $|x\rangle, |y\rangle$

$$|D\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|x\rangle + i|y\rangle) \quad \langle D| = \frac{1}{\sqrt{2}}(\langle x| - i\langle y|)$$
$$|G\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|x\rangle - i|y\rangle) \quad \langle G| = \frac{1}{\sqrt{2}}(\langle x| + i\langle y|)$$

d'où
$$\begin{aligned}\hat{R}_\theta &= e^{-i\theta}(|x\rangle\langle x| + i(|y\rangle\langle x| - |x\rangle\langle y|) + |y\rangle\langle y|)/2\\ &\quad + e^{i\theta}(|x\rangle\langle x| - i(|y\rangle\langle x| - |x\rangle\langle y|) + |y\rangle\langle y|)/2\\ &= \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2}|x\rangle\langle x| + \frac{-e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2i}|x\rangle\langle y| + \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}|y\rangle\langle x| + \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}|y\rangle\langle y|\end{aligned}$$

finalement $\boxed{\hat{R}_\theta = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}}$ ; en particulier : $\hat{R}_\theta|x\rangle = |\theta\rangle$