Examen 2015

1. $i\hbar \dfrac{\partial|\Psi(t)\rangle}{\partial t} = \hat{H}|\Psi(t)\rangle$

Oscillateur harmonique forcé

2. $\langle \hat{A}(t)\rangle = \langle \Psi(t)|\hat{A}(t)|\Psi(t)\rangle$

3. $$\frac{d\langle\hat{A}\rangle}{dt} = \frac{d\langle\Psi(t)|}{dt}\hat{A}(t)|\Psi(t)\rangle + \langle\Psi(t)|\frac{\partial\hat{A}}{\partial t}|\Psi(t)\rangle + \langle\Psi(t)|\hat{A}(t)\frac{d|\Psi(t)\rangle}{dt}$$

or $\dfrac{d\langle\Psi(t)|}{dt} = -\dfrac{1}{i\hbar}\langle\Psi(t)|\hat{H}$ car $\hat{H}$ hermitique

d'où $$\frac{d\langle\hat{A}\rangle}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\langle\Psi(t)|\hat{A}\hat{H}-\hat{H}\hat{A}|\Psi(t)\rangle + \left\langle\frac{\partial\hat{A}}{\partial t}\right\rangle$$
$$= \frac{1}{i\hbar}\langle[\hat{A},\hat{H}]\rangle$$

4. $$[\hat{A},\hat{B}\hat{C}] = \hat{A}\hat{B}\hat{C} - \hat{B}\hat{C}\hat{A} = (\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A})\hat{C} + \hat{B}(\hat{A}\hat{C}-\hat{C}\hat{A})$$
$$= [\hat{A},\hat{B}]\hat{C} + \hat{B}[\hat{A},\hat{C}]$$

5. $[\hat{x},\hat{p}] = i\hbar$

6. $[\hat{x},\hat{p}^2] = \hat{p}[\hat{x},\hat{p}] + [\hat{x},\hat{p}]\hat{p} = 2i\hbar\hat{p}$

$[\hat{x}^2,\hat{p}] = \hat{x}[\hat{x},\hat{p}] + [\hat{x},\hat{p}]\hat{x} = 2i\hbar\hat{x}$

7. $\hat{H}_0 = \dfrac{\hat{p}^2}{2m} + \dfrac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$

pour une énergie potentielle de la forme

$E_p = -F(t)\,x$; $\vec{F} = -\vec{\nabla}E_p = F(t)\,\vec{e}_x$

donc la force classique est $\boxed{F_0\cos(\omega_0 t)}$

8. $$[\hat{x},\hat{H}] = \frac{1}{2m}\underbrace{[\hat{x},\hat{p}^2]}_{2i\hbar\hat{p}} + \frac{1}{2}m\omega^2\underbrace{[\hat{x},\hat{x}^2]}_{0} - F_0\cos(\omega_0 t)\underbrace{[\hat{x},\hat{x}]}_{0} = i\hbar\frac{\hat{p}}{m} \Rightarrow \boxed{\frac{d\langle\hat{x}\rangle}{dt} = \frac{\langle\hat{p}\rangle}{m}}$$

$$[\hat{p},\hat{H}] = \frac{1}{2m}\underbrace{[\hat{p},\hat{p}^2]}_{0} + \frac{1}{2}m\omega^2\underbrace{[\hat{p},\hat{x}^2]}_{-2i\hbar\hat{x}} - F_0\cos(\omega_0 t)\underbrace{[\hat{p},\hat{x}]}_{-i\hbar} = -i\hbar m\omega^2\hat{x} + i\hbar F_0\cos(\omega_0 t) \Rightarrow \boxed{\frac{d\langle\hat{p}\rangle}{dt} = -m\omega^2\langle\hat{x}\rangle + F_0\cos(\omega_0 t)}$$

9. on a donc

$$\boxed{\frac{d^2\langle\hat{x}\rangle}{dt^2} + \omega^2\langle\hat{x}\rangle = \frac{F_0}{m}\cos(\omega_0 t)}$$

équation de l'oscillateur harmonique classique avec $x(t) = \langle\hat{x}\rangle$ et un forçage $F_0\cos(\omega_0 t)$

10. on a $\dfrac{\partial\hat{H}_0}{\partial t} = 0$ et $[\hat{H}_0,\underbrace{\hat{H}}_{\hat{H}_0+\hat{H}_1}] = -F_0\cos(\omega_0 t)\underbrace{[\hat{H}_0,\hat{x}]}_{-i\hbar\frac{\hat{p}}{m}} \Rightarrow \boxed{\dfrac{d\langle\hat{H}_0\rangle}{dt} = F_0\cos(\omega_0 t)\dfrac{\langle\hat{p}\rangle}{m}}$

- $\dfrac{\partial\hat{H}}{\partial t} = \dfrac{\partial\hat{H}_1}{\partial t} = F_0\omega_0\sin(\omega_0 t)\hat{x}$ et $[\hat{H},\hat{H}] = 0 \Rightarrow \boxed{\dfrac{d\langle\hat{H}\rangle}{dt} = F_0\omega_0\sin(\omega_0 t)\langle\hat{x}\rangle}$

l'énergie n'est pas conservée à cause du terme dépendant du temps. $F(t)$ est non-conservative à cause de la dépendance temporelle. Le théorème de l'énergie mécanique donne ici $\dfrac{dE_m}{dt} = F(t)v(t) = F_0\cos(\omega_0 t)\dfrac{p(t)}{m}$

donc $\boxed{E_m \text{ correspond à } \langle H_0\rangle}$ et non à $\langle\hat{H}\rangle$.

Effet Zenon quantique sur 1 spin 1/2

11. $E_{Zeeman} = -\vec{\mu}\cdot\vec{B} \to$ deux valeurs possibles $\begin{array}{l}\uparrow \to -\mu B\\ \downarrow \to +\mu B\end{array}$

d'où $\boxed{\hat{H} = \hbar\omega_c\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}}$

12. les résultats possibles sont les valeurs propres de $\hat{S}_x$ qui sont $\boxed{\pm\frac{\hbar}{2}}$ associées à $|\pm\rangle_x$

Les probabilités sont $\boxed{P_\pm = |{}_x\langle\pm|\psi\rangle|^2}$

Juste après la mesure, le système est dans l'état propre associé à la valeur propre mesurée (réduction du paquet d'onde), soit $|+\rangle_x$ soit $|-\rangle_x$.

13. $\hat{S}_x|+\rangle_x = \frac{\hbar}{2}|+\rangle_x$ et $|+\rangle_x = c_\uparrow|\uparrow\rangle + c_\downarrow|\downarrow\rangle$

donne $c_\uparrow = c_\downarrow \Rightarrow \boxed{|+\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)}$ après normalisation

de même $\hat{S}_x|-\rangle_x = -\frac{\hbar}{2}|-\rangle_x \Rightarrow c_\uparrow = -c_\downarrow$ et on choisit

$$\boxed{|-\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle)}$$

14. $i\hbar(\dot{a}|\uparrow\rangle + \dot{b}|\downarrow\rangle) = \hbar\omega_c(-a|\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle)$ d'où

$$\boxed{\begin{cases}\dot{a} = +i\omega_c a\\ \dot{b} = -i\omega_c b\end{cases}} \Rightarrow$$

15. $\boxed{a(t) = a(0)e^{i\omega_c t}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\omega_c t}}$

$\boxed{b(t) = b(0)e^{-i\omega_c t}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\omega_c t}}$

d'où $\boxed{|\Psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{i\omega_c t}|\uparrow\rangle + e^{-i\omega_c t}|\downarrow\rangle\right)}$

16. $P_1(T) = |{}_x\langle+|\Psi(T)\rangle|^2 = \frac{1}{2^2}\left|(\langle\uparrow| + \langle\downarrow|)(e^{i\omega_c T}|\uparrow\rangle + e^{-i\omega_c T}|\downarrow\rangle)\right|^2$

$$= \frac{1}{4}\Big|\underbrace{e^{i\omega_c T} + e^{-i\omega_c T}}_{2\cos(\omega_c T)}\Big|^2 = \cos^2\omega_c T$$

finalement, $\boxed{P_1(T) = \cos^2(\omega_c T)}$

17. sur l'intervalle de temps $[t_n, t_{n+1}]$ de longueur $\frac{T}{N}$ le calcul est le même que précédemment puisque l'on se place dans l'hypothèse $|\Psi(t_n)\rangle = |+\rangle_x$ et $|\Psi(0)\rangle = |+\rangle_x$

De plus, pour avoir $|+\rangle_x$ à t_1 <u>et</u> à t_2 <u>et</u> à t_3 … il faut multiplier les probabilités de chaque intervalle si bien que

$$\boxed{P_N(T) = \left[P_1\left(\frac{T}{N}\right)\right]^N}$$

18. si $N \to \infty$ $\cos\left(\omega_c\frac{T}{N}\right) \simeq 1 - \frac{1}{2}\frac{(\omega_c T)^2}{N^2} = 1 - \frac{x}{N}\frac{1}{N}$ avec $x = \frac{(\omega_c T)^2}{2}$

d'où $\boxed{P_N(T) \simeq \left[1 - \left(\frac{x}{N}\right)\frac{1}{N}\right]^N \simeq e^{-\underbrace{x/N}_{\to 0}} \to 1}$

Cela est surprenant car malgré l'évolution répétée sur de petits intervalles, le système reste à une probabilité 1 figé dans son état initial en raison du phénomène de réduction du paquet d'onde. La mesure agit sur l'évolution temporelle, contrairement à la mécanique classique.

Oscillations des neutrinos

19. $\langle \nu_e | \nu_e \rangle = (\cos\theta \langle \nu_1| + \sin\theta \langle \nu_2|)(\cos\theta|\nu_1\rangle + \sin\theta|\nu_2\rangle)$

comme $|\nu_1\rangle |\nu_2\rangle$ forment une base des états (états propres et normalisés)

on a $\langle \nu_i | \nu_j \rangle = \delta_{ij}$

$$= \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

$\langle \nu_\mu | \nu_e \rangle = 0$, on voit que $\boxed{|\nu_\mu\rangle = -\sin\theta|\nu_1\rangle + \cos\theta|\nu_2\rangle}$

est un choix possible $\langle \nu_\mu | \nu_e \rangle = -\sin\theta\cos\theta + \sin\theta\cos\theta$

20. Par définition des états propres: $\boxed{\hat{H}|\nu_{1,2}\rangle = E_{1,2}|\nu_{1,2}\rangle}$

<u>condition initiale:</u> $|\Psi(t=0)\rangle = |\nu_e\rangle = \cos\theta|\nu_1\rangle + \sin\theta|\nu_2\rangle$

<u>au temps t:</u> $|\Psi(t=0)\rangle = a_1(t)|\nu_1\rangle + a_2(t)|\nu_2\rangle$

<u>équation de Schrödinger:</u>

$$i\hbar \frac{\partial|\Psi\rangle}{\partial t} = \hat{H}|\Psi\rangle \Rightarrow i\hbar(\dot{a}_1|\nu_1\rangle + \dot{a}_2|\nu_2\rangle) = E_1 a_1|\nu_1\rangle + E_2 a_2|\nu_2\rangle$$

soit
$$\begin{cases} \dot{a}_1 = -i\dfrac{E_1}{\hbar}a_1 \\ \dot{a}_2 = -i\dfrac{E_2}{\hbar}a_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1(t) = \underset{}{\overset{\cos\theta}{\overset{\shortparallel}{a_1(0)}}}\, e^{-iE_1t/\hbar} \\ a_2(t) = \underset{\underset{\sin\theta}{\shortparallel}}{a_2(0)}\, e^{-iE_2t/\hbar} \end{cases}$$

et $\boxed{|\Psi(t)\rangle = \cos\theta\, e^{-iE_1t/\hbar}|\nu_1\rangle + \sin\theta\, e^{-iE_2t/\hbar}|\nu_2\rangle}$

21. $\boxed{P_e(T) = |\langle \nu_e | \Psi(T)\rangle|^2}$

$$\langle \nu_e | \Psi(T)\rangle = (\cos\theta\langle\nu_1| + \sin\theta\langle\nu_2|)|\Psi(T)\rangle$$

$$= \cos^2\theta\, e^{-iE_1T/\hbar} + \sin^2\theta\, e^{-iE_2T/\hbar}$$

$$= e^{-iE_1T/\hbar}\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\, e^{-i(E_2-E_1)T/\hbar}\right)$$

et
$$P_e(T) = \left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\, e^{i(E_2-E_1)T/\hbar}\right)\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\, e^{-i(E_2-E_1)T/\hbar}\right)$$

$$= \cos^4\theta + \sin^4\theta + \cos^2\theta\sin^2\theta\, 2\cos\left((E_2-E_1)T/\hbar\right)$$

or $(\cos^2\theta + \sin^2\theta)^2 = \cos^4\theta + \sin^4\theta + 2\sin^2\theta\cos^2\theta = 1$

$$\cos x = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \; ; \; x = \frac{(E_2-E_1)T}{\hbar}$$

d'où $P_e(T) = 1 - 2\sin^2\theta\cos^2\theta\underbrace{(1-\cos x)}_{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}$

enfin $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ de sorte que

$$\boxed{P_e(T) = 1 - \sin^2(2\theta)\sin^2(\omega_{12}T)}$$

avec $A = \sin^2(2\theta)$ et $\boxed{\omega_{12} = \dfrac{|E_2-E_1|}{2\hbar}}$ on ne connait pas le signe

22. $\boxed{\ell = cT} \Rightarrow T = \dfrac{\ell}{c}$ et $\omega_{12}T = \dfrac{|E_2-E_1|}{2\hbar}\dfrac{\pi\ell}{c\pi} = L$

soit $L = \dfrac{2\pi\hbar(2pc)c}{|m_2^2-m_1^2|c^4} = \dfrac{4\pi\hbar(pc)c}{\Delta m^2c^4}$ avec $\Delta m^2 = |m_2^2 - m_1^2|$

<u>AN:</u> $L \simeq \dfrac{10.200\,10^{-15}\,4\,10^6.10^6}{10^{-4}} \simeq 8.10^5\,m \simeq \underline{800\,km}$

pour $\theta \simeq \pi/4 \rightsquigarrow \sin^2 2\theta = 1$, $\omega_{12}T \simeq \pi\dfrac{200}{800} \simeq \pi/4 \rightsquigarrow \sin^2\frac{\pi}{4} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow$ on a donc $P_e = |1-0{,}5| > 0{,}1$ mesurable!