$\boxed{\text{Examen 2016}}$

1. $i\hbar \dfrac{\partial |\psi\rangle}{\partial t} = \hat{H}|\psi\rangle$

2. $[\hat{x},\hat{p}] = i\hbar$, en représentation de position $\hat{p} = -i\hbar\dfrac{\partial}{\partial x}$

$$[\hat{p}, V(\hat{x})]\psi(x) = \hat{p}V(x)\psi(x) - V(x)\hat{p}\psi(x) = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\left(V(x)\psi(x)\right) + i\hbar V(x)\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$= -i\hbar\frac{\partial V}{\partial x}\psi(x) - i\hbar \cancel{V(x)}\frac{\partial\psi}{\partial x} + i\hbar \cancel{V(x)}\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

ceci est vrai $\forall \psi$, $\Rightarrow$ $\boxed{[\hat{p}, V(\hat{x})] = -i\hbar\dfrac{dV}{d\hat{x}}}$

3. on suppose $[\hat{p},\hat{x}^n] = -i\hbar n\hat{x}^{n-1}$, regardons pour $n+1$

$$[\hat{p}, \underset{\hat{x}.\hat{x}^n}{\overset{\shortparallel}{\hat{x}^{n+1}}}] = \hat{x}[\hat{p},\hat{x}^n] + [\hat{p},\hat{x}]\hat{x}^n = -i\hbar n\hat{x}^{n-1+1} + (-i\hbar)\hat{x}^n$$
$$= -i\hbar(n+1)\hat{x}^{(n+1)-1} \quad \text{OK}$$

pour $n=1$, c'est vrai donc c'est vrai $\forall n$.

$$[\hat{p}, V(\hat{x})] = \sum_{n=0}^{\infty} v_n[\hat{p},\hat{x}^n] = -i\hbar\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} v_n n\hat{x}^{n-1}}_{\frac{dV(\hat{x})}{d\hat{x}}} = -i\hbar\frac{dV}{d\hat{x}}$$

4. le calcul est le même en intervertissant les rôles de $\hat{x}$ et $\hat{p}$ et en prenant garde que $[\hat{p},\hat{x}] = \underline{\underline{-i\hbar}}$, il faut donc changer $-i\hbar$ en $+i\hbar$ d'où $\boxed{[\hat{x}, f(\hat{p})] = i\hbar\dfrac{df}{d\hat{p}}}$

5. $\hat{H} = \dfrac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x})$

6. $\langle\hat{A}\rangle(t) = \langle\psi(t)|\hat{A}|\psi(t)\rangle$; $-i\hbar\dfrac{\partial\langle\psi|}{\partial t} = \langle\psi|\hat{H}$ d'où

$$\frac{d\langle\hat{A}\rangle}{dt} = \frac{d\langle\psi|}{dt}\hat{A}|\psi(t)\rangle + \langle\psi|\hat{A}\frac{d|\psi\rangle}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\left[\langle\psi|\hat{A}\hat{H}|\psi\rangle - \langle\psi|\hat{H}\hat{A}|\psi\rangle\right]$$

soit $\boxed{\dfrac{d\langle\hat{A}\rangle}{dt} = \dfrac{1}{i\hbar}\langle[\hat{A},\hat{H}]\rangle}$

7. $[\hat{x},\hat{H}] = [\hat{x}, \dfrac{\hat{p}^2}{2m}] + \underset{0}{\overset{\shortparallel}{[\hat{x}, V(\hat{x})]}} = \dfrac{\hat{p}}{2m}\underset{i\hbar}{\overset{\shortparallel}{[\hat{x},\hat{p}]}} + \underset{i\hbar}{\overset{\shortparallel}{[\hat{x},\hat{p}]}}\dfrac{\hat{p}}{2m} = \dfrac{\hat{p}}{m}i\hbar$

d'où $\boxed{\dfrac{d\langle\hat{x}\rangle}{dt} = \dfrac{\langle\hat{p}\rangle}{m}}$

$$[\hat{p},\hat{H}] = \underset{0}{\overset{\shortparallel}{[\hat{p}, \frac{\hat{p}^2}{2m}]}} + [\hat{p}, V(\hat{x})] \overset{2.}{=} -i\hbar\frac{dV}{d\hat{x}} = i\hbar F(\hat{x})$$

↳ opérateur force

d'où $\boxed{\dfrac{d\langle\hat{p}\rangle}{dt} = \langle F(\hat{x})\rangle}$ En général $\langle F(\hat{x})\rangle \neq F(\langle\hat{x}\rangle)$

pour avoir le PFD, il faudrait avoir $F(\langle x\rangle)$ à droite.

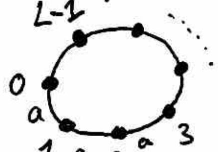
8. $F(\hat{x}) \simeq F(\langle\hat{x}\rangle) + F'(\langle\hat{x}\rangle)(\hat{x}-\langle\hat{x}\rangle) + \dfrac{F''}{2}(\langle\hat{x}\rangle)(\hat{x}-\langle\hat{x}\rangle)^2 + \dots$

$$↳ \langle F(\hat{x})\rangle \simeq F(\langle\hat{x}\rangle) + F'(\langle\hat{x}\rangle)\underset{\langle\hat{x}\rangle - \langle\hat{x}\rangle = 0}{\overset{\shortparallel}{\langle\hat{x}-\langle\hat{x}\rangle\rangle}} + \frac{F''}{2}(\langle\hat{x}\rangle)\underbrace{\langle(\hat{x}-\langle\hat{x}\rangle)^2\rangle}_{\Delta\hat{x}^2} + \dots$$

si $\boxed{\Delta\hat{x}^2 F''(\langle\hat{x}\rangle) \ll 1}$, on peut prendre $\langle F(\hat{x})\rangle \simeq F(\langle\hat{x}\rangle)$

↳ variance

on retrouve alors le principe fondamental de la dynamique.

9. 

$x_{j+1} - x_j = a$; $x_j - x_{j-1} = a$

$$\psi(x_{j\pm1}) \simeq \psi(x_j) \pm \psi'(x_j)a + \psi''(x_j)\frac{a^2}{2}$$

↳ $\boxed{\psi''(x_j) \simeq \dfrac{\psi(x_{j+1}) + \psi(x_{j-1}) - 2\psi(x_j)}{a^2}}$

$\hat{H}_{cin} = -\dfrac{\hbar^2}{2m}\hat{\Delta} \rightsquigarrow J \simeq \dfrac{\hbar^2}{2ma^2}$

10. dans la base des $\{|j\rangle\}$, on notera que, $L=5$

$$\hat{H}_{cin}|4\rangle = -J\big[\underset{\overset{\parallel}{|0\rangle}}{|5\rangle} + |3\rangle - 2|4\rangle\big] \quad \text{etc...}$$

$|0\rangle \rightarrow$ conditions aux bords périodiques

$$\hat{H}_{cin} = -J\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

11. comme $x_j = ja$, $|k\rangle = \frac{1}{\sqrt{L}}\sum_{j=0}^{L-1} e^{-ikaj}|j\rangle$

a. $\hat{T}^L|j\rangle = \hat{T}^{L-1}|j+1\rangle = \dots = |j+L\rangle = |j\rangle$

↑ périodicité

d'où $\boxed{\hat{T}^L = \mathbb{1}}$ si λ est une valeur propre de $\hat{T}$ alors $\lambda^L = 1$ et donc $\boxed{\lambda = e^{i\frac{2\pi n}{L}}}$ avec $\underbrace{n = 0, 1, \dots, L-1}_{L \text{ valeurs}}$

b. $\hat{T}|k\rangle = \frac{1}{\sqrt{L}}\sum_{j=0}^{L-1} e^{-ikaj}\underbrace{\hat{T}|j\rangle}_{|j+1\rangle}$ on pose $j' = j+1$

$$= \frac{1}{\sqrt{L}}\sum_{j'=1}^{L} e^{-ika(j'-1)}|j'\rangle = e^{ika}\frac{1}{\sqrt{L}}\sum_{j'=1}^{L} e^{-ikaj'}|j'\rangle$$

or pour $j' = L$ on a $e^{-ikaL} = 1$ et $|L\rangle = |0\rangle$ donc c'est la même chose que $j' = 0$ d'où

$$\hat{T}|k\rangle = e^{ika}\frac{1}{\sqrt{L}}\sum_{j'=0}^{L-1} e^{-ikaj'}|j'\rangle = e^{ika}|k\rangle$$

$|k\rangle$ est donc état propre de $\hat{T}$ avec la valeur propre e^{ika} donc d'après a, $\boxed{ka = \frac{2\pi}{L}n \text{ avec } n = 0, 1, \dots, L-1}$

12. $\langle k|k'\rangle = \frac{1}{L}\sum_{j=0}^{L-1}\sum_{j'=0}^{L-1} e^{+ikaj}e^{-ik'aj'}\underbrace{\langle j|j'\rangle}_{\delta_{jj'}}$

$$= \frac{1}{L}\sum_{j=0}^{L-1} e^{i(ka-k'a)j}$$

si $k = k'$: $\langle k|k\rangle = \frac{1}{L}\sum_{j=0}^{L-1} 1 = \frac{L}{L} = 1$

si $k \neq k'$: posons $u = e^{i(k-k')a} \neq 1$, $\langle k|k'\rangle = \frac{1}{L}\sum_{j=0}^{L-1} u^j$

$$= \frac{u^L - 1}{u-1}\cdot\frac{1}{L}$$

or $u^L = e^{i\frac{2\pi}{\cancel{L}}\frac{\cancel{a}}{\cancel{a}}(n-n')\cancel{L}} = 1$ donc $\langle k|k'\rangle = 0$

finalement $\boxed{\langle k|k'\rangle = \delta_{kk'}}$

13. $\hat{H}_{cin}|k\rangle = \frac{1}{\sqrt{L}}\sum_{j=0}^{L-1} e^{-ikaj}\hat{H}_{cin}|j\rangle$

$$= -J\left(\frac{1}{\sqrt{L}}\sum_{j=0}^{L-1} e^{-ikaj}|j+1\rangle + \frac{1}{\sqrt{L}}\sum_{j=0}^{L-1} e^{-ikaj}|j-1\rangle - 2\underbrace{\frac{1}{\sqrt{L}}\sum_{j=0}^{L-1} e^{-ikaj}|j\rangle}_{|k\rangle}\right)$$

pour le premier terme, c'est la même chose que $\hat{T}|k\rangle$, cela donne donc $e^{ika}|k\rangle$, pour le second, on pose $j' = j-1$ et on utilise $|-1\rangle = |L-1\rangle$ ce qui donne $e^{-ika}|k\rangle$

d'où $\hat{H}_{cin}|k\rangle = -J\left(e^{ika} + e^{-ika} - 2\right)|k\rangle$

ou $\boxed{\hat{H}_{cin}|k\rangle = \mathcal{E}(k)|k\rangle}$ avec $\boxed{\mathcal{E}(k) = 2J(1 - \cos(ka))}$

↳ état propre de $\hat{H}_{cin}$ — énergies possibles.

14. on a $\boxed{p = \hbar k}$ les états $|k\rangle$ sont des états d'impulsion donnée, états propres de l'opérateur $\hat{p}$

on peut donc écrire $\boxed{\hat{H}_{cin} = 2J\left[1 - \cos\left(\frac{a}{\hbar}\hat{p}\right)\right]}$

si $p \ll \frac{\hbar}{a}$, on a $1 - \cos\left(\frac{ap}{\hbar}\right) \simeq 1 - \left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{ap}{\hbar}\right)^2\right) \simeq \frac{a^2p^2}{\hbar^2}$

si on prend $J = \frac{\hbar^2}{2ma^2}$ (question 9.), on retrouve $E \simeq \frac{p^2}{2m}$ l'expression usuelle de l'énergie cinétique.

15. il faut recalculer $[\hat{x}, \hat{H}]$ avec $\hat{H} = \hat{H}_{cin} + V(\hat{x})$

seul $\hat{H}_{cin}$ compte : $[\hat{x}, \hat{H}_{cin}] = \left[\hat{x}, 2J\left(1 - \cos\left(\frac{a}{\hbar}\hat{p}\right)\right)\right] \overset{4.}{=} 2J\frac{a}{\hbar}\sin\left(\frac{a}{\hbar}\hat{p}\right)$

d'où $\boxed{\frac{d\langle\hat{x}\rangle}{dt} = \frac{2Ja}{\hbar}\left\langle\sin\left(\frac{a}{\hbar}\hat{p}\right)\right\rangle}$

16. Classiquement, l'énergie est conservée car la force est conservative $V(\hat{x}) = -F\hat{x}$ et $F = $ cte.

Lorsque on lâche la particule à une hauteur D elle a une énergie potentielle $|F|D > 0$. Elle convertit cette énergie potentielle en énergie cinétique en tombant. Si l'energie cinétique est $\frac{p^2}{2m}$, elle augmente jusqu'au sol quelle que soit D car elle peut prendre des valeurs arbitrairement grandes.

Dans le cas d'une particule sur le réseau, l'énergie cinétique est <u>bornée</u>, elle ne peut pas dépasser $4J$ (lorsque $\cos = -1$) donc on ne peut pas convertir toute l'énergie potentielle en énergie cinétique, la particule ne peut pas descendre plus bas que l'altitude z donnée par $4J - Fz = -FD$

soit $z = D + 4J/F = D - 4J/|F|$. Elle n'atteint donc pas toujours le sol!

17. si on néglige Δp^2, on peut faire l'approximation $\left\langle\sin\left(\frac{a\hat{p}}{\hbar}\right)\right\rangle \simeq \sin\left(\frac{a\langle\hat{p}\rangle}{\hbar}\right)$ d'où $\frac{d\langle x\rangle}{dt} \simeq \frac{2Ja}{\hbar}\sin\left(\frac{a\langle\hat{p}\rangle}{\hbar}\right)$ et $-V'_{(\hat{x})} = F$

18. $\frac{d\langle\hat{p}\rangle}{dt} = F$ s'intègre en $\boxed{\langle\hat{p}\rangle(t) = Ft}$ car $\langle\hat{p}\rangle(0) = 0$

d'où $\frac{d\langle x\rangle}{dt} = \frac{2Ja}{\hbar}\sin\left(\frac{aF}{\hbar}t\right) \Rightarrow \langle x\rangle_{(t)} = -\frac{2J}{F}\cos\left(\frac{aF}{\hbar}t\right)$ + A avec A une constante

$\langle x\rangle_{(0)} = 0 \Rightarrow A = \frac{2J}{F}$ et $\boxed{\langle x\rangle(t) = \frac{2J}{F}\left(1 - \cos\left(\frac{aF}{\hbar}t\right)\right)}$

c'est un mouvement <u>d'oscillations</u> (yo-yo!) de période $\boxed{\tau_B = 2\pi\frac{\hbar}{a|F|} = \frac{h}{aF}}$ et d'amplitude $2J/|F|$.

19. la figure montre l'évolution linéaire de $\langle\hat{p}\rangle(t)$ avec le temps (position du pic) / les valeurs prises par p sont périodiques car $k = \frac{2\pi}{La}n \ldots$

20. valeurs propres $\begin{vmatrix} -\lambda & -i\hbar/2 \\ i\frac{\hbar}{2} & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 = 0$

soit $\underline{\lambda = \pm \hbar/2}$. Vecteurs propres soit

$|+\rangle_y = c_\uparrow |\uparrow\rangle + c_\downarrow |\downarrow\rangle$; $\hat{S}_y |+\rangle_y = \frac{\hbar}{2} |+\rangle_y$ donne

$$\frac{\hbar}{2}\left(i c_\downarrow |\uparrow\rangle - i c_\uparrow |\uparrow\rangle\right) = \frac{\hbar}{2}\left(c_\uparrow |\uparrow\rangle + c_\downarrow |\downarrow\rangle\right)$$

soit $c_\uparrow = i c_\downarrow$ soit $|+\rangle_y = c_\uparrow\left(|\uparrow\rangle + i|\downarrow\rangle\right)$

et on prend $c_\uparrow = \frac{1}{\sqrt{2}}$ pour normaliser l'état.

De même pour l'état $|-\rangle_y$: $\boxed{|\pm\rangle_y = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle \pm i|\downarrow\rangle\right)}$

21. a. résultats possibles : $\boxed{\pm \frac{\hbar}{2}}$ (valeurs propres)

b. $\boxed{p_\pm = |\langle\psi|\pm\rangle_y|^2}$

c. l'état juste après la mesure est dans l'état propre de $\hat{S}_y$ correspondant au résultat observé.

22. $\hat{H} = -\vec{B}\cdot\hat{\vec{\mu}} = -B\cdot\hat{\mu}_z$ car $E_{Zeeman} = -\vec{\mu}\cdot\vec{B}$ et ici $\hat{\mu}_z = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & -\mu \end{pmatrix}$

dans la base $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$ d'où, en posant $\hbar\omega_c = \mu B$

$$\boxed{\hat{H} = \hbar\omega_c \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

23. a. trouvons d'abord $c_\uparrow(t)$ et $c_\downarrow(t)$. On note $c_\uparrow(0)$ et $c_\downarrow(0)$ les conditions initiales. Ecrivons l'équation de Schrödinger pour $|\psi(t)\rangle = c_\uparrow(t)|\uparrow\rangle + c_\downarrow(t)|\downarrow\rangle$

$$i\hbar\left(\dot{c}_\uparrow |\uparrow\rangle + \dot{c}_\downarrow |\downarrow\rangle\right) = \hbar\omega_c\left(-c_\uparrow(t)|\uparrow\rangle + c_\downarrow(t)|\downarrow\rangle\right)$$

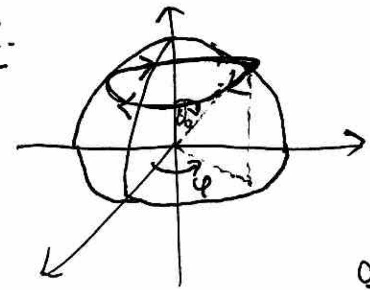
on projète sur $|\uparrow\rangle$: $\rightarrow$ $\dot{c}_\uparrow = i\omega_c c_\uparrow$ $\rightarrow$ $\boxed{c_\uparrow(t) = c_\uparrow(0)e^{i\omega_c t}}$

on projète sur $|\downarrow\rangle$: $\rightarrow$ $\dot{c}_\downarrow = -i\omega_c c_\downarrow$ $\rightarrow$ $\boxed{c_\downarrow(t) = c_\downarrow(0)e^{-i\omega_c t}}$

finalement, $\boxed{|\psi(t)\rangle = \cos\left(\frac{\theta_0}{2}\right)e^{-i\varphi_0/2}e^{i\omega_c t}|\uparrow\rangle + \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)e^{i\varphi_0/2}e^{-i\omega_c t}|\downarrow\rangle}$

b. on voit que cela revient à prendre $\boxed{\theta(t) = \theta_0}$ $\boxed{\varphi(t) = \varphi_0 - 2\omega_c t}$

c.



la trajectoire est un cercle correspondant à θ fixé à θ_0

d. c'est un mouvement de <u>précession</u>

24. $\langle\psi|\hat{S}_z|\psi\rangle = \left(c_\uparrow^*\langle\uparrow| + c_\downarrow^*\langle\downarrow|\right)\hat{S}_z\left(c_\uparrow|\uparrow\rangle + c_\downarrow|\downarrow\rangle\right) = \underbrace{\left(|c_\uparrow|^2 - |c_\downarrow|^2\right)}_{\cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2} = \cos\theta}\frac{\hbar}{2} = \underline{\frac{\hbar}{2}\cos\theta}$

$\langle\psi|\hat{S}_x|\psi\rangle = \left(c_\uparrow^*\langle\uparrow| + c_\downarrow^*\langle\downarrow|\right)\left(c_\uparrow|\downarrow\rangle + c_\downarrow|\uparrow\rangle\right)\frac{\hbar}{2} = \frac{\hbar}{2}\left(c_\uparrow^* c_\downarrow + c_\downarrow^* c_\uparrow\right) = \hbar\,\mathrm{Re}(c_\uparrow^* c_\downarrow)$

$= \frac{\hbar}{2}\left(\underbrace{2\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}}_{\sin\theta}\cos\varphi\right) = \underline{\frac{\hbar}{2}\sin\theta\cos\varphi}$; $\langle\psi|\hat{S}_y|\psi\rangle = \underline{\frac{\hbar}{2}\sin\theta\sin\varphi}$