Partiel octobre 2014

Questions de cours

1. $\boxed{p(x) = |\Psi_{(x,t)}|^2}$

2. équation de Schrödinger dépendant du temps :

$$\boxed{i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + V_{(x)}\Psi}$$

3. solution de la forme $\Psi_{(x,t)} = \varphi_{(x)} e^{-iEt/\hbar}$

donne $$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \varphi(x)\left(-\frac{i}{\hbar}E\right)e^{-iEt/\hbar} = -\frac{i}{\hbar}E\Psi$$

soit $$\underbrace{i\hbar\left(-\frac{i}{\hbar}\right)}_{=1} E\varphi = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + V_{(x)}\varphi$$ [en simplifiant par $e^{-iEt/\hbar}$]

qui est l'équation de Schrödinger stationnaire :

$$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + V_{(x)}\varphi = E\varphi}$$

4. La solution générale telle que

$$\Psi_{(x,t=0)} = \sum_n c_n \varphi_n(x)$$

est alors la superposition

$$\boxed{\Psi_{(x,t)} = \sum_n c_n \varphi_n(x)\, e^{-iE_n t/\hbar}}$$

5. Dans l'état $\Psi_{(x,t)}$:

$$\boxed{\begin{aligned} \langle x\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} x\,|\Psi_{(x,t)}|^2\,dx \\ \langle x^2\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\,|\Psi_{(x,t)}|^2\,dx \end{aligned}}$$

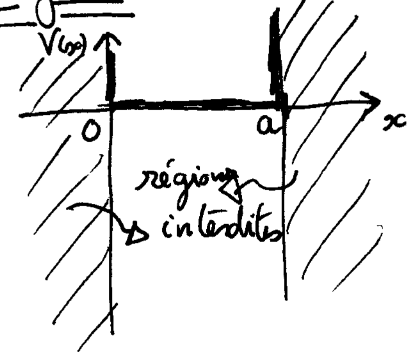
écart-type

$$\boxed{\Delta x = \sqrt{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2}}$$

6. Relation d'incertitude d'Heisenberg : $\boxed{\Delta x \Delta p \geqslant \frac{\hbar}{2}}$

Puits infini

7.



dans les régions interdites $\boxed{\begin{aligned}\varphi_{(x)} &= 0\\ \varphi'_{(x)} &= 0\end{aligned}}$

8. Pour $0 \leqslant x \leqslant a$: $\boxed{-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = E\varphi}$

solutions de la forme ondes planes pour $E > 0$

car $\varphi''_{(x)} + k^2\varphi_{(x)} = 0$ avec $\boxed{k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}}$

9. Conditions aux limites : $\boxed{\varphi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}}$

$\varphi(x=0) = \varphi(x=a) = 0$ car la fonction d'onde est continue.

10. des conditions aux limites, on tire

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ A e^{ika} + B e^{-ika} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -B \neq 0 \text{ car } \varphi \neq 0 \\ A 2i \sin(ka) = 0 \end{cases}$$

on doit donc avoir $\sin ka = 0$ qui a pour solution $\boxed{k_n = n\frac{\pi}{a}}$ n entier

Cependant, $\varphi_n(x) = A\, 2i \sin(k_n x)$ est non-nulle donc $n=0$ est à exclure. Enfin, $+n$ et $-n$ sont tels que $\varphi_{-n}(x) = -\varphi_n(x)$ et correspondent au même état physique si bien que l'on ne conserve que les $n>0$ soit $\boxed{n = 1, 2, 3, \dots}$

11. d'après 8. et 10. $\boxed{E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} = \underbrace{\frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2}}_{E_1} n^2}$

12. On a $\varphi_n(x) = A\, 2i \sin\left(n\pi \frac{x}{a}\right)$ d'après les résultats précédents. Déterminons A par

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi_n(x)|^2 dx = 1 = 4|A|^2 \int_0^a \sin^2\left(n\pi\frac{x}{a}\right) dx$$

φ nulle en dehors de $[0,a]$

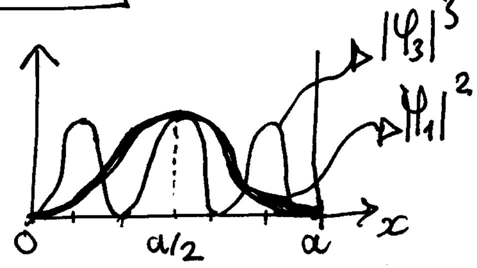
or $\sin^2\theta = \frac{1}{2} - \frac{\cos 2\theta}{2}$ d'où $1 = 4|A|^2 \left[\underbrace{\int_0^a \frac{dx}{2}}_{a/2} - \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^a \cos\left(\frac{2n\pi x}{a}\right) dx}_{=0}\right]$

d'où $|A|^2 = \frac{1}{2a}$, comme φ_n est choisi à une phase globale près, on peut prendre $2iA = \sqrt{\frac{2}{a}}$ d'où

$$\boxed{\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\pi n \frac{x}{a}\right)}$$

13. a. $|\varphi_1(x)|^2 = \frac{2}{a} \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)$

$|\varphi_3(x)|^2 = \frac{2}{a} \sin^2\left(\frac{3\pi x}{a}\right)$



b. $\langle x \rangle_{\varphi_1} = \frac{2}{a} \int_0^a dx \left[x \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)\right]$

$$= \frac{2}{a}\left[\underbrace{\int_0^a dx\, x \times \frac{1}{2}}_{\frac{1}{4}a^2} - \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^a dx\, x \cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right)}\right]$$

$$= \left[x \frac{\sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right)}{\frac{2\pi}{a}}\right]_0^a - \int_0^a dx \cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right)$$

(chacun des deux termes $= 0$)

$$\boxed{\langle x \rangle_{\varphi_1} = \frac{a}{2}}$$

de même, on voit que le facteur 3 changera 2π en 6π mais les termes de droite s'annuleront

$\boxed{\langle x \rangle_{\varphi_3} = \frac{a}{2}}$ on pouvait s'y attendre par symétrie.

14. a. $\Psi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi_1(x) - \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi_3(x)$

donc $\boxed{\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi_1(x)\, e^{-iE_1 t/\hbar} - \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi_3(x)\, e^{-iE_3 t/\hbar}}$

avec $E_3 = 3^2 E_1 = 9E_1$

b. $|\Psi(x=\frac{a}{2},t)|^2 = \frac{1}{2}\,\frac{2}{a}\left| e^{-iE_1 t/\hbar} + e^{-i9E_1 t/\hbar}\right|^2$

car $\varphi_1(a/2) = \sqrt{\frac{2}{a}} = -\varphi_3(\frac{a}{2})$

à $t=0$, $\boxed{|\Psi(x=a/2,0)|^2 = \frac{4}{a}}$

c. on écrit $\left| e^{-iE_1 t/\hbar} + e^{-i9E_1 t/\hbar}\right|^2$

$$= \underset{1}{\underset{\shortparallel}{|e^{-iE_1 t/\hbar}|^2}} \times \left| e^{-i8E_1 t/\hbar} + 1\right|^2$$

$$= \underset{1}{\underset{\shortparallel}{\left| e^{-i4E_1 t/\hbar}\right|^2}} \left| \underbrace{e^{-i4E_1 t/\hbar} + e^{i4E_1 t/\hbar}}_{2\cos(4E_1 t/\hbar)}\right|^2$$

soit $\boxed{|\Psi(x=\frac{a}{2},t)|^2 = \frac{4}{a}\cos\left(4\frac{E_1 t}{\hbar}\right)}$

s'annule pour t_m tel que $\boxed{\frac{4E_1}{\hbar} t_m = \frac{\pi}{2} m}$ m entier

cela est dû à un phénomène d'interférences.