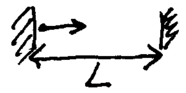
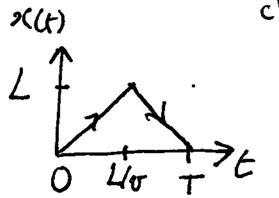
Partiel 2015

Quantification de Bohr et puits infini :

1. h est la constante de Planck. Unité $[p] = kg.m.s^{-1}$, $[x] = m$ $\Big\}$ $[h] = kg\,m^2 s^{-1} = J.s$

$h \simeq 6.10^{-34}\, J\,s$

2.  particule libre $\Rightarrow v = cste$, arrive en $x = L$ au bout de $\frac{L}{v}$ revient en $x=0$ au bout de $\boxed{T = \frac{2L}{v}}$ après avoir changé de signe de la vitesse en $x = L$.



3. sur $[0, T/2]$, $\boxed{p = mv}$, sur $[T/2, T]$, $\boxed{p = -mv}$

quantification : $\oint p\,dx = nh = \int_0^{T/2} mv\,(v\,dt) + \int_{T/2}^{T} (-mv)(-v\,dt)$ ($dx = \pm v\,dt$)

$= mv^2 \frac{T}{2} + mv^2 \frac{T}{2} = mv^2 T = 2mLv$

d'où les valeurs possibles de v : $\boxed{v_n = \frac{nh}{2mL}}$

4. $E = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow E_n = \frac{1}{2}mv_n^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{nh}{2mL}\right)^2 \Rightarrow \boxed{E_n = \frac{h^2}{8mL^2}n^2}$

5. $\boxed{p = \hbar k}$ avec $\hbar = h/2\pi$

6. en $V \to \infty$ pour $x = 0, L$, $\varphi \to 0$ soit $\varphi(0) = \varphi(L) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin(\phi) = 0 \\ \sin(kL + \phi) = 0 \end{cases}$

on choisit $\phi = 0$ et il reste $kL = n\pi$, $n \neq 0$ car $\varphi \neq 0$ d'où $\boxed{k_n = n\frac{\pi}{L};\ n \in \mathbb{N}^*}$

7. $\boxed{E_n = \frac{p_n^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m}k_n^2 = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}n^2 = \frac{h^2}{8mL^2}n^2}$ on retrouve le même résultat.

Saut de Potentiel :

1. $\boxed{P(x) = |\Psi(x,t)|^2}$

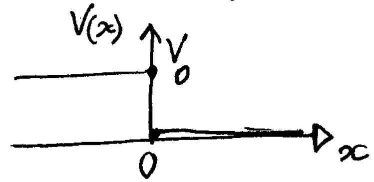
2. $\boxed{i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\Psi + V(x)\Psi}$ le terme de droite représente $H\Psi$ avec H l'hamiltonien.

3. $\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -i\omega\Psi \to \hbar\omega\Psi = H\Psi$, Ψ décrit une particule d'énergie

a. $\boxed{E = \hbar\omega}$ bien déterminée

b. $|\Psi(x,t)|^2 = |\varphi(x)|^2$ est indépendant du temps $\to$ état stationnaire.

c. en simplifiant par $e^{-i\omega t} \Rightarrow \boxed{\frac{d^2\varphi}{dx^2} - \frac{2m}{\hbar^2}(V(x) - E)\varphi = 0}$

4. 

classiquement, si la particule vient de la gauche $E > V_0$ et la région de droite est accessible car $E > 0$ ~~la~~ particule est toujours transmise et non réfléchie.

5. comme $E > V_0 > 0$, les solutions à gauche et à droite sont des ondes planes.

a. $A e^{ikx}$: onde incidente ; $B e^{-ikx}$: onde réfléchie

$A' e^{iqx}$: onde transmise ; il n'y a pas d'onde venant de la droite dont pas de terme e^{-iqx}

b. $\frac{d^2}{dx^2} A e^{ikx} = (ik)^2 A e^{ikx} \to -k^2 - \frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - E) = 0$ soit $\boxed{k = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E - V_0)} > 0}$

de même $-q^2 + \frac{2m}{\hbar^2}E = 0 \Rightarrow \boxed{q = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}E} > 0}$

6. en $x = 0$: $\begin{cases} \varphi(x^-) = \varphi(x^+) \\ \varphi'(x^-) = \varphi'(x^+) \end{cases}$ car potentiel discontinu mais fini.

ou encore : $\begin{cases} A + B = A' \\ ik(A - B) = iqA' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A'/A = 1 + B/A \\ \frac{1 - B/A}{1 + B/A} = \frac{q}{k} = \gamma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A'/A = 1 + B/A \\ (1 - B/A) = \gamma(1 + B/A) \end{cases}$

d'où $\boxed{\begin{aligned} B/A &= -\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \\ A'/A &= +\frac{2}{\gamma + 1} \end{aligned}}$

7. a. $x < 0$: $J = \frac{\hbar}{m}\mathrm{Im}\left[(A^* e^{-ikx} + B^* e^{ikx})ik(Ae^{ikx} - Be^{-ikx})\right]$

$= \frac{\hbar k}{m}\mathrm{Im}\left[i(|A|^2 - |B|^2) + (-2i)\mathrm{Im}(AB^* e^{-2ikx})\right]$

$\boxed{J = \frac{\hbar k}{m}(|A|^2 - |B|^2) = J_i + J_r}$

$x > 0$: $J = \frac{\hbar}{m}\mathrm{Im}\left(A'^* e^{-iqx} iq A' e^{iqx}\right)$

$\boxed{J = \frac{\hbar q}{m}|A'|^2 = J_t}$

b. $\boxed{R = |J_r/J_i|;\ T = J_t/J_i}$

c. $\boxed{R = \frac{k}{k}\left|\frac{B}{A}\right|^2 = \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}\right)^2;\ T = \frac{q}{k}\left|\frac{A'}{A}\right|^2 = \frac{4\gamma}{(\gamma + 1)^2}}$

d. $E \gg V_0$, $\gamma \to 1$, $R \to 0$, $T \to 1$ cas classique

$E \to V_0$; $\gamma \to \infty$, $R \to 1$, $T \to 0$ $\to$ réflexion totale !