Partiel Novembre 2016

1. $F(x) = -\frac{\partial V}{\partial x} = -m\omega^2 x$. PFD : $m\ddot{x} = -m\omega^2 x \Rightarrow \boxed{\ddot{x}+\omega^2 x = 0}$

2. solution générale : $x(t) = A\cos(\omega t+\phi)$, $\dot{x}(0) = -\omega A \sin\phi = 0 \Rightarrow \phi = 0$ par choix

puis $x(0)=x_0 \Rightarrow A = x_0$ soit $\boxed{x(t)=x_0\cos(\omega t)}$

$p(t) = m\dot{x}(t)$ donne $\boxed{p(t) = -m\omega x_0 \sin(\omega t)}$

3. E est conservée pour ce système conservatif. $E = \frac{p^2}{2m}+\frac12 m\omega^2x^2$

on choisit en $t=0$, $x(0)=x_0$, $p(0)=0 \Rightarrow \boxed{E=\frac12 m\omega^2 x_0^2}$

4. h : constante de Planck, en J s ou $kg\,m^2\,s^{-1}$, $h \simeq 6.10^{-34}$ Js

$\hbar = h/2\pi$.

5. $\oint p\,dx = \int_0^T p(t)\frac{dx}{dt}dt = \int_0^T m\dot{x}^2(t)\,dt = m\omega^2x_0^2\int_0^T \sin^2(\omega t)\,dt$

or $\sin^2\omega t = \frac12 - \frac12\cos 2\omega t$ et $\int_0^T \cos(2\omega t)\,dt = 0$; $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

d'où $\oint p\,dx = \frac12 m\omega^2 x_0^2 T = E_n T = nh$ soit $\boxed{E_n = nh/T}$

comme $\frac{h}{T} = \frac{h}{2\pi}\frac{2\pi}{T} = \hbar\omega \Rightarrow \boxed{E_n = \hbar\omega n}$

6. pour $n=0$, on a ici $\boxed{E_0=0}$. Avec la note de bas de page

$E_n = \hbar\omega(n+1/2) \rightarrow E_0 = \hbar\omega/2$ (le bon résultat).

7. $\Delta x = \sqrt{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2}$; $\Delta p = \sqrt{\langle p^2\rangle-\langle p\rangle^2}$; pour les états propres de l'oscillateur harmonique $\Delta x = \sqrt{\langle x^2\rangle}$ et $\Delta p = \sqrt{\langle p^2\rangle}$.

8. Relation d'incertitude de Heisenberg : $\boxed{\Delta x\Delta p \geq \hbar/2}$

9. $\langle E\rangle = \left\langle \frac{p^2}{2m}+\frac12 m\omega^2x^2\right\rangle = \frac{\langle p^2\rangle}{2m}+\frac12 m\omega^2\langle x^2\rangle$

$= \frac{\Delta p^2}{2m} + \frac12 m\omega^2\Delta x^2$ or $\Delta x^2 \geq \frac{\hbar^2}{4}\frac{1}{\Delta p^2}$

$$\boxed{\langle E\rangle \geq \frac{\Delta p^2}{2m}+\frac18 m\hbar^2\omega^2\frac{1}{\Delta p^2}}$$

10. Minimisons $f(u) = \frac{u}{2m}+\frac18 m\hbar^2\omega^2\frac1u$ $\quad f'(u) = \frac{1}{2m} - \frac{m\hbar^2\omega^2}{8u^2} = 0$

donne $u = \frac12 m\hbar\omega$ et c'est bien un minimum. L'énergie pour cette valeur vaut $\langle E\rangle = \frac12\frac{m\hbar\omega}{2m}+\frac18 m\hbar^2\omega^2\frac{1}{\frac12 m\hbar\omega} = \frac{\hbar\omega}{2}$

Ainsi $\boxed{\langle E\rangle\geq\frac{\hbar\omega}{2}}$. En particulier, on ne peut pas avoir d'énergie nulle comme dans l'approche semi-classique et si le fondamental réalise le minimum, on aura $\boxed{E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}}$

11. Equation de Schrödinger stationnaire :

$$\boxed{\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac12 m\omega^2x^2\right)\Psi(x) = E\,\Psi(x)}$$

12. pour que l'argument de l'exponentielle soit sans dimension il faut de $[\ell] = [x] = m$ ou $[\ell] = \left(\frac{[\hbar]}{[m][\omega]}\right)^{1/2} = \left(\frac{kg\,m^2 s^{-1}}{kg\,s^{-1}}\right)^{1/2} = m$

ℓ est une longueur. Normalisation : $\int_{-\infty}^{+\infty}|\Psi_0(x)|^2dx = \frac{1}{\sqrt{\pi\ell^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2/\ell^2}dx = \frac{1}{\sqrt{\pi\ell^2}}\sqrt{\frac{\pi}{1/\ell^2}} = 1$

Ψ_0 est bien normalisée

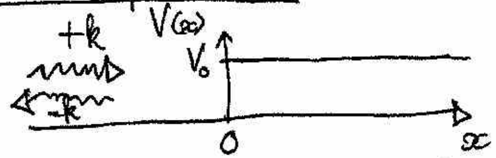
13. $\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi_0 = \frac{\partial}{\partial x}\left(c_0\left(-\frac{x}{\ell^2}\right)e^{-x^2/2\ell^2}\right)$

$= c_0\left(-\frac{1}{\ell^2}e^{-x^2/2\ell^2}+\frac{x^2}{\ell^4}e^{-x^2/2\ell^2}\right) = -\frac{\Psi_0}{\ell^2}+\frac{x^2}{\ell^4}\Psi_0$

$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi_0}{\partial x^2}+\frac12 m\omega^2x^2\Psi_0\right) = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(-\frac{\Psi_0}{\ell^2}+\cancel{\frac{x^2}{\ell^4}\Psi_0}\right)+\frac12 m\omega^2 \cancel{x^2}\Psi_0 = \frac{\hbar^2}{2m\ell^2}\Psi_0 \Rightarrow \boxed{E_0 = \frac{\hbar^2}{2m\ell^2} = \frac{\hbar\omega}{2}}$

Marche de potentiel:

1.



classiquement pour $E<V_0$, la particule est réfléchie.

2. d'après le cours, on a $E>0$ donc des solutions propagatives à gauche : $\varphi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$ pour $x<0$

à droite $E<V_0$ donc on a des solutions en ondes évanescentes : $\varphi(x) = A'e^{-Kx} + B'e^{Kx}$ pour $x>0$

a. Ae^{ikx} : onde incidente, Be^{-ikx} : onde réfléchie
$A'e^{-Kx}$: onde transmise, on doit avoir $B'=0$ car e^{Kx} diverge en $x\to\infty$.

b. $\varphi'' + \frac{2m}{\hbar^2}(E-V(x))\varphi = 0$ donne $\boxed{k=\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}}$

et $\boxed{K=\sqrt{\frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2}}}$

3. en $x=0$: $\varphi(0^+)=\varphi(0^-)$
$\varphi'(0^+)=\varphi'(0^-)$ d'où $\boxed{\begin{matrix} A+B=A' \\ ik(A-B) = -KA' \end{matrix}}$

on a $\frac{A-B}{A+B} = i\frac{K}{k} = i\gamma \Rightarrow 1-B/A = i\gamma(1+B/A) \Rightarrow B/A(1+i\gamma)=1-i\gamma$

ou $\boxed{\frac{B}{A}=\frac{1-i\gamma}{1+i\gamma}}$

et $A' = A(1+B/A) \Rightarrow \boxed{\frac{A'}{A} = \frac{2}{1+i\gamma}}$

4. a. $\varphi = Ae^{ikx}+Be^{-ikx}$; $\varphi' = ik(Ae^{ikx} - Be^{-ikx})$

$\varphi^* = A^*e^{-ikx} + B^*e^{ikx}$; $\varphi^*\varphi' = \underbrace{i}_{\text{facteur imaginaire}}k(\underbrace{|A|^2 - |B|^2}_{\text{nombre réel}} \underbrace{- A^*Be^{-2ikx} + B^*Ae^{2ikx}}_{\text{nombre imaginaire}})$

$\Rightarrow \mathrm{Im}[\varphi^*\varphi'] = k(|A|^2-|B|^2)$ et $\boxed{J = \underbrace{\frac{\hbar k}{m}|A|^2}_{J_i} - \underbrace{\frac{\hbar k}{m}|B|^2}_{J_r}}$

b. $\boxed{R = \left|\frac{J_r}{J_i}\right|}$ ici $R = \left|\frac{B}{A}\right| = \left|\frac{1-i\gamma}{1+i\gamma}\right| = \frac{1+\gamma^2}{1+\gamma^2} = \underline{\underline{1}}$

Toutes les particules sont réfléchies <u>mais</u> elles ont une probabilité non nulle de se trouver en $x \geq 0$ (onde évanescente, effet quantique).

c. <u>déphasage</u> $\frac{B}{A}$ est de module 1 donc $\frac{B}{A} = e^{-i\theta}$

avec θ une phase ; $\theta = \arg\left(-\frac{1-i\gamma}{1+i\gamma}\right)$ et

$$\varphi(x) = A(e^{ikx} + e^{-i(kx+\theta)})$$

l'onde réfléchie est déphasée de θ.