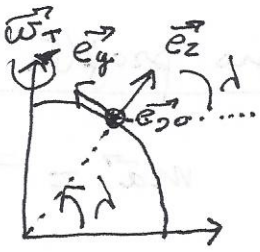
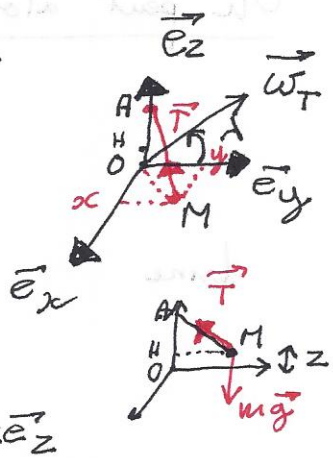
Pendule de Foucault :





Système : le pendule

Réf : R_T non galiléen

Bilan des forces : $m\vec{g}$, $\vec{T}$, $\vec{f}_c$ ($\vec{f}_e$ incluse dans $\vec{g}$)

1. $\vec{T} \parallel \vec{MA}$ et $\vec{MA} = \vec{MO} + \vec{OA} = -x\,\vec{e}_x - y\,\vec{e}_y + (\ell - z)\vec{e}_z$

et $MA = \boxed{\sqrt{x^2+y^2+(\ell-z)^2} = \ell}$. Soit $\boxed{\vec{u} = -\frac{x}{\ell}\vec{e}_x - \frac{y}{\ell}\vec{e}_y + \frac{\ell-z}{\ell}\vec{e}_z}$

le vecteur unitaire $\vec{u} \parallel \vec{T}$ si bien que $\vec{T} = T\,\vec{u}$

avec l'hypothèse $\frac{x}{\ell}, \frac{y}{\ell}, \frac{z}{\ell} \ll 1$, on peut écrire à l'ordre 1

$$\boxed{\vec{u} \simeq -\frac{x}{\ell}\vec{e}_x - \frac{y}{\ell}\vec{e}_y + \vec{e}_z}$$

et $\boxed{m\vec{g} = -mg\,\vec{e}_z}$

Coriolis : $\boxed{\vec{f}_c = -2m\vec{\omega}_T \wedge \vec{v}}$

vitesse : par hypothèse $\vec{v} = \dot{x}\,\vec{e}_x + \dot{y}\,\vec{e}_y + \dot{z}\,\vec{e}_z$

or $x^2+y^2+(\ell-z)^2 = \ell^2 \Rightarrow x\dot{x} + y\dot{y} + \underbrace{(\ell-z)}_{\simeq \ell}(-\dot{z}) = 0$

soit $\dot{z} = \dot{x}\frac{x}{\ell} + \dot{y}\frac{y}{\ell} \ll \dot{x}, \dot{y}$

on peut prendre $\dot{z} \simeq 0$ et $\ddot{z} \simeq 0$

soit $\boxed{\vec{v} = \dot{x}\,\vec{e}_x + \dot{y}\,\vec{e}_y}$

d'où $\vec{f}_c \simeq -2m\omega_T(\vec{e}_y\cos\lambda + \sin\lambda\,\vec{e}_z) \wedge (\dot{x}\,\vec{e}_x + \dot{y}\,\vec{e}_y)$

$$= 2m\omega_T\Big(-\cos\lambda\,\dot{x}\,\underbrace{\vec{e}_y \wedge \vec{e}_x}_{=-\vec{e}_z} + \dot{x}\sin\lambda\,\underbrace{(-\vec{e}_z \wedge \vec{e}_x)}_{=-\vec{e}_y} + \dot{y}\sin\lambda\,\underbrace{(-\vec{e}_z \wedge \vec{e}_y)}_{=+\vec{e}_x}\Big)$$

$$\boxed{\vec{f}_c = 2m\omega_T(\dot{y}\sin\lambda\,\vec{e}_x - \dot{x}\sin\lambda\,\vec{e}_y + \dot{x}\cos\lambda\,\vec{e}_z)}$$

On peut alors projeter le PFD sur la base $(\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$:

$$m\vec{a} = \vec{T} + m\vec{g} + \vec{f_c}$$

donne

$$m\ddot{x} = -\frac{x}{\ell}T + 2m\omega_T \sin\lambda\, \dot{y}$$

$$m\ddot{y} = -\frac{y}{\ell}T - 2m\omega_T \sin\lambda\, \dot{x}$$

$$0 = -mg + T + 2m\omega_T \cos\lambda\, \dot{x}$$

la dernière équation donne $\frac{T}{\ell} = m\left(\frac{g}{\ell} - 2\omega_T \cos\lambda \frac{\dot{x}}{\ell}\right)$

or $\frac{\dot{x}}{\ell} \approx \omega_0 x/\ell$ avec $\omega_0^2 = \frac{g}{\ell}$

d'où $\frac{2\omega_T \cos\lambda\, \dot{x}}{g} \approx \frac{\omega_T \omega_0}{\omega_0^2}\frac{x}{\ell} = \frac{\omega_T}{\omega_0}\frac{x}{\ell} \ll 1$

on peut donc faire $\boxed{T \simeq mg}$, d'où

$$\boxed{\begin{aligned} \ddot{x} &= -\omega_0^2 x + 2\Omega\dot{y} \quad (1) \\ \ddot{y} &= -\omega_0^2 y - 2\Omega\dot{x} \quad (2) \end{aligned}} \qquad \text{avec } \boxed{\Omega = \omega_T \sin\lambda}$$

On pose $u = x + iy$, $\dot{u} = \dot{x} + i\dot{y}$ et $\ddot{u} = \ddot{x} + i\ddot{y}$

On somme $(1) + i(2) \Rightarrow \ddot{u} = -\omega_0^2 u + 2\Omega(\underbrace{\dot{y} - i\dot{x}}_{= -i(\dot{x} + i\dot{y}) = -i\dot{u}})$

d'où $\boxed{\ddot{u} + 2\Omega i \dot{u} + \omega_0^2 u = 0}$

Solution de la forme : $u(t) = A e^{rt} \rightarrow$ équation caractéristique

$$\boxed{r^2 + 2\Omega i r + \omega_0^2 = 0}$$

déterminant : $\Delta = 4\Omega^2(-1) - 4\omega_0^2 = -4(\omega_0^2 + \Omega^2) < 0 \rightarrow$ complexe

et $r_\pm = \frac{1}{2}\left[-2\Omega i \pm i\, 2\sqrt{\omega_0^2 + \Omega^2}\right] = i(-\Omega \pm \omega_0')$

avec $\omega_0' = \sqrt{\omega_0^2 + \Omega^2} \left(\simeq \omega_0\right)$

Ainsi, $u(t) = A\, e^{i(-\Omega + \omega_0')t} + B e^{i(-\Omega - \omega_0')t}$ $\quad$ A, B complexes

<u>Conditions initiales et détermination de A et B:</u>

$$\vec{v}_0 = \vec{0} \Rightarrow \dot{x}(0) = \dot{y}(0) = \dot{u}(0) = 0$$

donc $\quad (-\Omega + \omega_0')A + (-\Omega - \omega_0')B = 0$

soit $\quad \boxed{B = \frac{\omega_0' - \Omega}{\omega_0' + \Omega} A} \quad (B \simeq A)$

soit $\quad x(0) = x_0$ et $y(0) = 0$, alors

$$u(0) = x_0 \quad \text{réel}$$

$$= A + B = A\left(1 + \frac{\omega_0' - \Omega}{\omega_0' + \Omega}\right) = A \frac{2\omega_0'}{\omega_0' + \Omega}$$

soit $\quad \boxed{A = \frac{x_0}{2} \frac{\omega_0' + \Omega}{\omega_0'}}$ et $\boxed{B = \frac{x_0}{2} \frac{\omega_0' - \Omega}{\omega_0'}}$

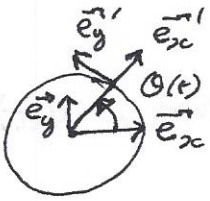
où $\quad A = \frac{x_0}{2}\left(1 + \frac{\Omega}{\omega_0'}\right)$ et $B = \frac{x_0}{2}\left(1 - \frac{\Omega}{\omega_0'}\right)$

soit $\quad u(t) = x_0\, e^{-i\Omega t}\left[\cos(\omega_0' t) + \frac{\Omega}{\omega_0'} \underbrace{\frac{1}{2}\left[e^{i\omega_0' t} - e^{-i\omega_0' t}\right]}_{i \sin(\omega_0' t)}\right]$

<u>finalement:</u> $\quad \boxed{u(t) = x_0\, e^{-i\Omega t}\left[\cos(\omega_0' t) + i \frac{\Omega}{\omega_0'} \sin(\omega_0' t)\right]}$

et
$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= \mathrm{Re}(u(t)) = x_0\left[\cos(\Omega t)\cos(\omega_0' t) + \frac{\Omega}{\omega_0'} \sin(\Omega t)\sin(\omega_0' t)\right] \\ y(t) &= \mathrm{Im}(u(t)) = x_0\left[-\sin(\Omega t)\cos(\omega_0' t) + \frac{\Omega}{\omega_0'} \cos(\Omega t)\sin(\omega_0' t)\right] \end{aligned}}$$

Montrons que la trajectoire est une ellipse dans le référentiel tournant à $\boxed{\theta(t) = -\Omega t}$



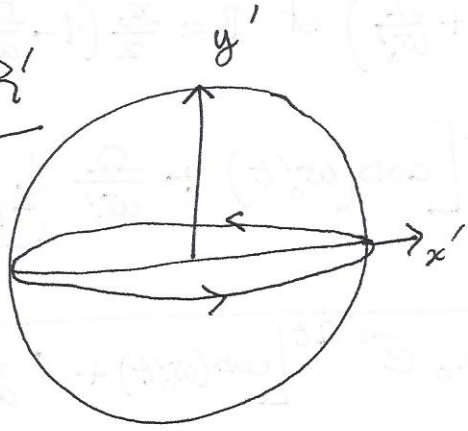
on a:
$$\vec{e}_x' = \cos\theta\, \vec{e}_x + \sin\theta\, \vec{e}_y$$
$$\vec{e}_y' = -\sin\theta\, \vec{e}_x + \cos\theta\, \vec{e}_y$$
$$x = x_0 \left[\cos\theta \cos\omega_0' t - \frac{\Omega}{\omega_0'} \sin\theta \sin\omega_0' t\right]$$
$$y = x_0 \left[+\sin\theta \cos\omega_0' t + \frac{\Omega}{\omega_0'} \cos\theta \sin\omega_0' t\right]$$

d'où
$$x' = x\cos\theta + y\sin\theta$$
$$= x_0\left[\cos^2\theta \cos\omega_0' t + \sin^2\theta \cos\omega_0' t\right]$$
$$+ x_0 \frac{\Omega}{\omega_0'}\left[-\sin\theta\cos\theta + \cos\theta\sin\theta\right]\sin\omega_0' t$$
$$y' = -x\sin\theta + y\cos\theta = x_0 \frac{\Omega}{\omega_0'} \overset{=0}{\sin\omega_0' t}$$

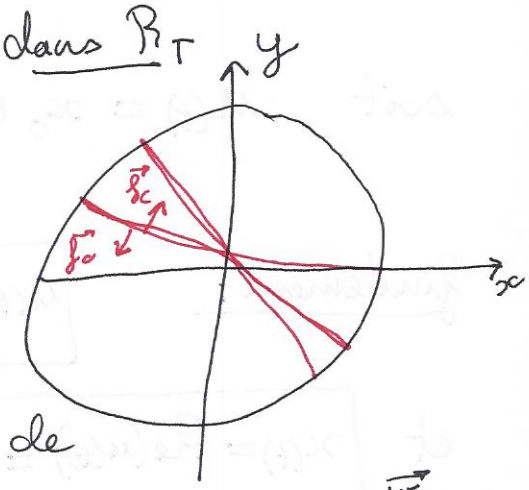
soit
$$\boxed{\begin{aligned} x' &= x_0 \cos\omega_0' t \\ y' &= \frac{\Omega}{\omega_0'} x_0 \sin\omega_0' t \end{aligned}}$$

Ellipse de demi axes:
$$\boxed{\begin{aligned} a &= x_0 \\ b &= \frac{\Omega}{\omega_0'} x_0 \ll a \end{aligned}}$$
très aplatie

dans $\mathcal{R}'$



dans $\mathcal{R}_T$



La force de Coriolis change de sens avec $\vec{v}$.

Au pôle, $\sin\lambda = 1$, l'interprétation est simple