Partiel de mécanique

octobre 2013

Manège à tasses :

1.a. pour le mouvement circulaire : $\boxed{\vec{v}_T = b\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta = b\omega\,\vec{e}_\theta}$

b. $\boxed{\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OT} + \overrightarrow{TP} = b\,\vec{e}_\rho + c\,\vec{e}_r = b\,\vec{e}_\rho + c\cos\alpha\,\vec{e}_\rho + c\sin\alpha\,\vec{e}_\theta}$

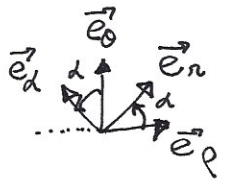
on a $\left.\dfrac{d\vec{e}_\rho}{dt}\right)_R = \omega\,\vec{e}_\theta$ et $\left.\dfrac{d\vec{e}_\theta}{dt}\right)_R = -\omega\,\vec{e}_\rho$

d'où
$$\vec{v}_P = \left.\frac{d\overrightarrow{OP}}{dt}\right)_R = \frac{d}{dt}(b + c\cos\alpha)\,\vec{e}_\rho + (b + c\cos\alpha)\left.\frac{d\vec{e}_\rho}{dt}\right)_R + \frac{d}{dt}(c\sin\alpha)\,\vec{e}_\theta + c\sin\alpha\left.\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}\right)_R$$
$$= c\left[-\dot{\alpha}\sin\alpha - \omega\sin\alpha\right]\vec{e}_\rho + \left[+\omega(b + c\cos\alpha) + c\dot{\alpha}\cos\alpha\right]\vec{e}_\theta$$

$$\boxed{\vec{v}_P = -\left[\dot{\alpha} + \omega\right]c\sin\alpha\,\vec{e}_\rho + \left[b\omega + (\dot{\alpha} + \omega)c\cos\alpha\right]\vec{e}_\theta}$$

c.
$$\vec{a}_P = \left.\frac{d\vec{v}_P}{dt}\right)_R = \left[-c\ddot{\alpha}\sin\alpha - \dot{\alpha}(\dot{\alpha} + \omega)c\cos\alpha\right]\vec{e}_\rho - \omega\left[\dot{\alpha} + \omega\right]c\sin\alpha\,\vec{e}_\theta + \left[c\ddot{\alpha}\cos\alpha - c\dot{\alpha}(\dot{\alpha} + \omega)\sin\alpha\right]\vec{e}_\theta + \left[b\omega + (\dot{\alpha} + \omega)c\cos\alpha\right](-\omega\,\vec{e}_\rho)$$

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{a}_P = &\left[-b\omega^2 - c\ddot{\alpha}\sin\alpha - c(\dot{\alpha} + \omega)^2\cos\alpha\right]\vec{e}_\rho \\ &+ \left[c\ddot{\alpha}\cos\alpha - c(\dot{\alpha} + \omega)^2\sin\alpha\right]\vec{e}_\theta\end{aligned}}$$

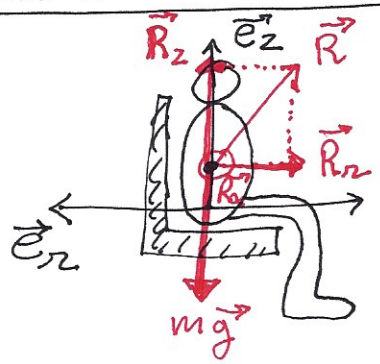


2. on utilise :
$$\begin{cases}\vec{e}_r = \cos\alpha\,\vec{e}_\rho + \sin\alpha\,\vec{e}_\theta \\ \vec{e}_\alpha = -\sin\alpha\,\vec{e}_\rho + \cos\alpha\,\vec{e}_\theta\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases}\vec{e}_\rho = \cos\alpha\,\vec{e}_r - \sin\alpha\,\vec{e}_\alpha \\ \vec{e}_\theta = \sin\alpha\,\vec{e}_r + \cos\alpha\,\vec{e}_\alpha\end{cases}$$

on peut d'abord écrire
$$\vec{a}_P = -b\omega^2\,\vec{e}_\rho - c(\dot{\alpha} + \omega)^2\,\vec{e}_r + c\ddot{\alpha}\,\vec{e}_\alpha$$

puis
$$\boxed{\vec{a}_P = \left[-b\omega^2\cos\alpha - c(\dot{\alpha} + \omega)^2\right]\vec{e}_r + \left[b\omega^2\sin\alpha + c\ddot{\alpha}\right]\vec{e}_\alpha}$$

b. Bilan des forces sur P dans $\mathcal{R}$: poids, réaction de la chaise



$m\vec{g} = -mg\vec{e}_z$

$\vec{R} = R_r\vec{e}_r + R_\alpha\vec{e}_\alpha + R_z\vec{e}_z$

↳ cas avec $R_r < 0$
↳ expulsion si $R_r > 0$

A priori, la réaction est selon les trois directions.

$\mathcal{R}$ est galiléen, si on écrit le PFD appliqué à P :

$$\boxed{m\vec{a}_P = m\vec{g} + \vec{R}}$$

Projection : selon $\vec{e}_r$: $m a_r = R_r$

selon $\vec{e}_\alpha$: $m a_\alpha = R_\alpha$

selon $\vec{e}_z$: $0 = -mg + R_z$ (pas de mouvement selon z)

d'où $\boxed{R_z = mg}$ et $\boxed{R_r = m a_r,\ R_\alpha = m a_\alpha}$

Bilan des forces dans $\mathcal{R}_T$: $\mathcal{R}_T$ est non-galiléen mais P est fixe dans $\mathcal{R}_T$ donc $\vec{a}_c$ (accélération de Coriolis) est nulle et d'autre part $\vec{a}_{P/\mathcal{R}_T} = \vec{0}$ donc, d'après la formule du changement de référentiel de $\mathcal{R}$ à $\mathcal{R}_T$

$$\vec{a}_{P/\mathcal{R}} = \underbrace{\vec{a}_{P/\mathcal{R}_T}}_{=\vec{0}} + \vec{a}_e + \underbrace{\vec{a}_c}_{=\vec{0}} = \vec{a}_e$$

P est en fait un point coïncidant. Dès lors, la force d'entraînement $\boxed{\vec{f}_e = -m\vec{a}_e}$ vaut $\boxed{\vec{f}_e = -m\vec{a}_P}$

Le bilan des forces s'écrit : poids, réaction, $\vec{f}_e$ et comme la personne est immobile, le PFD dans $\mathcal{R}_T$ s'écrit :

$$\boxed{\vec{0} = m\vec{g} + \vec{R} - m\vec{a}_P}$$

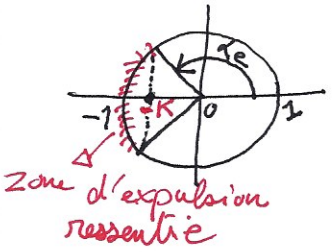
On retrouve le même résultat.

c. La personne se sentira expulsée de son dossier si $\boxed{R_r > 0}$, c'est-à-dire $\boxed{a_r > 0}$ (dans ce cas $\vec{f_e} \cdot \vec{e_r} < 0$) dirigée vers la droite sur le schéma de la question 2.b.

d. On en tire que $-b\omega^2 \cos\alpha - c(\dot{\alpha}+\omega)^2 > 0$

soit $-\cos\alpha > \frac{c}{b}\left(1+\frac{\dot{\alpha}}{\omega}\right)^2$ ou $\boxed{\cos\alpha < -\frac{c}{b}\left(1+\frac{\dot{\alpha}}{\omega}\right)^2}$

On a que $\frac{c}{b}\left(1+\frac{\dot{\alpha}}{\omega}\right)^2$ est un nombre positif que l'on note K et qui correspond à un angle $\alpha_e > \frac{\pi}{2}$ et $< \frac{3\pi}{2}$.



la zone où le sentiment d'expulsion existe s'annule si $K > 1$.

e. On considère $\Omega = \dot{\alpha} = \text{cste}$: alors, la personne n'a jamais l'impression d'être expulsée si $K = \frac{c}{b}\left(1+\frac{\Omega}{\omega}\right)^2 > 1$

- soit $\Omega > 0$:

  alors il faut $\boxed{\Omega > \omega\left(\sqrt{\frac{b}{c}} - 1\right)}$ (>0 car $b>c$)

- soit $\Omega < 0$: (rotation en sens inverse)

  on écrit $\Omega = -|\Omega|$ et $\frac{c}{b}\left(1-\frac{|\Omega|}{\omega}\right)^2 > 1$

  donne $\left|1-\frac{|\Omega|}{\omega}\right| > \sqrt{\frac{b}{c}}$

  comme $b>c$, $\left|1-\frac{|\Omega|}{\omega}\right| > 1$ donc on doit avoir $|\Omega| > \omega$

  alors $\frac{|\Omega|}{\omega} - 1 > \sqrt{\frac{b}{c}}$ soit $\boxed{|\Omega| > \omega\left(\sqrt{\frac{b}{c}} + 1\right)}$

Dans les deux cas, il faut tourner suffisamment vite et le seuil est plus grand si l'on tourne en sens inverse.