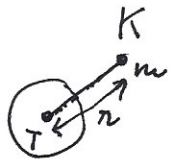
Satellite en orbite circulaire et elliptique

Questions de cours



1. K se situe à l'extérieur de la Terre. D'après le théorème de Gauss appliqué au champ gravitationnel terrestre : $\oiint \vec{\mathcal{G}}.d\vec{S} = -4\pi G M$

$$\oiint \vec{\mathcal{G}}.d\vec{S} = 4\pi r^2\, \mathcal{G}(r) \text{ soit } \boxed{\mathcal{G}(r) = -\frac{GM}{r^2}}$$

est le même que si M était ponctuelle située en T.

2. Force d'attraction gravitationnelle de T sur K :

$$\boxed{\vec{f} = -\frac{GMm}{r^2}\frac{\vec{TK}}{TK}} \quad \text{avec } \boxed{r = TK}$$

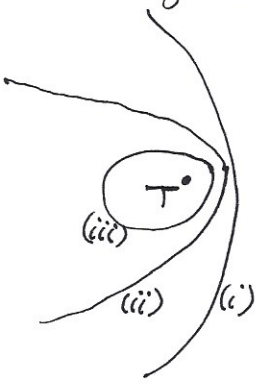
D'après le cours, cette force dérive du potentiel

$$\boxed{E_p = -\frac{GMm}{r}} \quad \text{car } \overrightarrow{\text{grad}}_K \frac{1}{r} = -\frac{\vec{TK}}{TK^3}$$

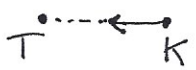
3. La force est centrale. $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \wedge \vec{f}$ d'après le théorème du moment cinétique appliqué à K dans $\mathcal{R}_{géo}$. Or $\vec{f} \parallel \vec{r}$ donc $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0}$, soit $\boxed{\vec{L} \text{ constant}}$.

4. Suivant les conditions initiales on a les types de trajectoires possibles :

- (i) • hyperbolique } trajectoires ouvertes
- (ii) • parabolique
- (iii) • elliptique } trajectoire fermée
- (• linéaire si $\vec{v}(t=0) \parallel \vec{r}$)



↳



Erreur de satellisation

5. orbite circulaire $\Rightarrow r = r_0 = cte \Rightarrow$ vitesse $\vec{v_0} = r_0 \dot{\theta} \vec{e_\theta}$

accélération $\vec{a} = -r_0 \dot{\theta}^2 \vec{e_r} + r_0 \ddot{\theta} \vec{e_\theta}$

or, le moment cinétique est conservé $\Rightarrow \vec{L} = \vec{r} \wedge m\vec{v}$

$= m r_0^2 \dot{\theta} \underbrace{\vec{e_r} \wedge \vec{e_\theta}}_{= \vec{e_z}}$

$$\boxed{\vec{L} = m r_0^2 \dot{\theta} \vec{e_z}}$$

comme r_0 est constante et $\vec{L}$ également $\Rightarrow \left| \begin{array}{l} \dot{\theta} = cte \\ \ddot{\theta} = 0 \end{array} \right.$ et $v_0 = r_0 |\dot{\theta}|$ est constante

ainsi $\boxed{\vec{v_0} = v_0 \vec{e_\theta}}$ (en supposant $\dot{\theta} > 0$)

et $\boxed{\vec{a} = -\frac{v_0^2}{r_0} \vec{e_r}}$

6. Appliquons le PFD à K dans $\mathcal{R}$: la force est uniquement celle de gravitation : $m\vec{a} = -\frac{GM}{r_0^2} m \vec{e_r} = -\frac{v_0^2}{r_0} \vec{e_r}$

d'où le résultat $\boxed{v_0 = \sqrt{\frac{GM}{r_0}}}$

7. constante des aires :

la vitesse $\vec{v_0}$ dans la base polaire s'écrit $\boxed{\vec{v_0} = v_0 \left| \begin{array}{l} \sin\alpha \\ \cos\alpha \end{array} \right.}$

on a aussi $\vec{v} = \left| \begin{array}{l} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \end{array} \right.$ et la constante des aires vaut $\boxed{C = r^2 \dot{\theta}}$ d'après le cours

On calcule C au point K_0 pour lequel $r = r_0$ et $r\dot{\theta} = v_0 \cos\alpha$

d'où $\boxed{C = r_0 v_0 \cos\alpha}$

8. en polaire : $\boxed{\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e_r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e_\theta}}$ d'après le cours.

9. comme $r^2\dot{\theta} = cste \Rightarrow \frac{d}{dt} r^2\dot{\theta} = 0 = 2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta}$

d'où $\boxed{2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0 = a_\theta}$

il y a uniquement le terme selon $\vec{e_r}$: $\boxed{\vec{a} = a_r \vec{e_r}}$

de plus, $\ddot{r} = \frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\dot{\theta}\frac{dr}{d\theta}\right) \overset{\dot{\theta} = C/r^2}{=} \frac{d}{dt}\left(\frac{C}{r^2}\frac{dr}{d\theta}\right) \overset{\frac{d}{d\theta}\frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta}}{=} -C\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{d\theta}\frac{1}{r}\right)$

$$= -C\,\dot{\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{d}{d\theta}\frac{1}{r}\right) = -\frac{C^2}{r^2}\frac{d^2}{d\theta^2}\frac{1}{r}$$

et $r\dot{\theta}^2 = r\left(\frac{C}{r^2}\right)^2 = \frac{C^2}{r^3}$

d'où $\boxed{a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{C^2}{r^2}\left[\frac{1}{r} + \frac{d^2}{d\theta^2}\frac{1}{r}\right]}$

10. PFD appliqué au satellite :

$$m\vec{a} = -\frac{GMm}{r^2}\vec{e_r} \Rightarrow -\frac{C^2}{r^2}\left[\frac{1}{r} + \frac{d^2}{d\theta^2}\frac{1}{r}\right] = -\frac{GM}{r^2}$$

comme $1/r \neq 0$, on a $\boxed{\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r} = \frac{GM}{C^2}}$ équation différentielle satisfaite par $1/r$.

11. l'énoncé nous donne la solution : $\frac{1}{r} = \frac{1}{p}(1 + e\cos\theta)$

[de plus, en K_0 on a $r = r_0$ et $\theta = \theta_0$ soit $\frac{1}{r_0} = \frac{1}{p}(1 + e\cos\theta_0)$]

Reportons la solution dans l'équation différentielle :

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\frac{1}{r} = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{p}(-e\sin\theta)\right) = -\frac{e}{p}\cos\theta \Rightarrow \cancel{-\frac{e}{p}\cos\theta} + \frac{1}{p} + \cancel{\frac{e}{p}\cos\theta} = \frac{GM}{C^2}$$

soit $p = \frac{C^2}{GM} = \frac{r_0^2 v_0^2 \cos^2\alpha}{r_0 v_0^2}$ ⇝ d'après 7. → d'après 6.

finalement $\boxed{p = r_0\cos^2\alpha}$

Pour l'excentricité, il faut calculer la vitesse en K_0 et faire apparaître θ_0 puis l'éliminer.

on a $\quad v_\theta = r\dot{\theta} = \dfrac{C}{r} \Rightarrow \overset{\text{en } K_0 :}{v_\theta} = \underline{\dfrac{C}{p}(1+e\cos\theta_0) = v_0\cos\alpha}$

$$v_r = \dot{r} = \dot{\theta}\frac{dr}{d\theta} = \frac{C}{r^2}\frac{dr}{d\theta} = -C\frac{d}{d\theta}\frac{1}{r} = -\frac{C}{p}(-e\sin\theta)$$

$\hookrightarrow$ en $K_0 \Rightarrow \quad \underline{\dfrac{C}{p}e\sin\theta_0 = v_0\sin\alpha}$

de plus $\quad \dfrac{C}{p} = \dfrac{r_0 v_0\cos\alpha}{r_0^2\cos^2\alpha} = \dfrac{v_0}{\cos\alpha}$ d'où les deux relations

$$\begin{cases} 1+e\cos\theta_0 = \cos^2\alpha \\ e\sin\theta_0 = \sin\alpha\cos\alpha \end{cases}$$

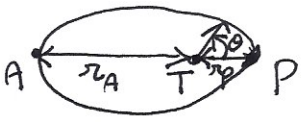
on en déduit $\quad e^2\cos^2\theta_0 + e^2\sin^2\theta_0 = (\cos^2\alpha - 1)^2 + \sin^2\alpha\cos^2\alpha$

$$\overset{\shortparallel}{e^2} \qquad = \cancel{\cos^4\alpha} - 2\cos^2\alpha + 1 + \cos^2\alpha(1-\cancel{\cos^2\alpha})$$

$$= 1-\cos^2\alpha = \sin^2\alpha$$

d'où le résultat $\quad \boxed{e = |\sin\alpha|}$

12. <u>Périgée</u>: $\theta = 0 \Rightarrow \dfrac{1}{r_p} = \dfrac{1}{p}(1+e)$



soit $\quad \boxed{r_p = \dfrac{r_0\cos^2\alpha}{1+|\sin\alpha|}}$

<u>Apogée</u>: $\theta = \pi \Rightarrow \dfrac{1}{r_A} = \dfrac{1}{p}(1-e)$

soit $\quad \boxed{r_A = \dfrac{r_0\cos^2\alpha}{1-|\sin\alpha|}}$

<u>N.B</u>: on notera que l'énoncé du concours 2013 n'était pas correct puisqu'il supposait que $\theta = 0$ ($= \theta_0$) pour $K = K_0$ ce qui n'est pas possible.