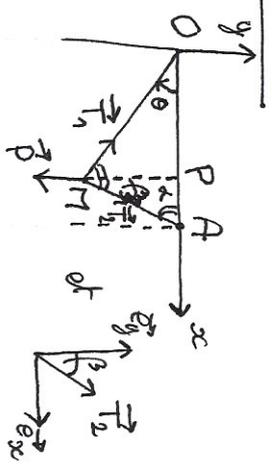


Équilibre d'une masse suspendue

1. $\vec{P} = m_1 g \vec{e}_y = -m_1 g \vec{e}_y$



2. $\vec{T}_2 \parallel \vec{OA}$ et en norme $T_2 = m_2 g$ car le fil idéal transmet la tension qui au point N compense exactement la poids $m_2 g$.

Pour obtenir la direction \vec{MA}/\vec{MA} de \vec{T}_2 on cherche l'angle β du schéma ci-contre. Comme le triangle OAM est isocèle, $\theta + 2\alpha = \pi \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} - \theta$.

On dans le triangle rectangle PAM, on a aussi $\alpha + \beta + \pi/2 = \pi$ soit $\beta = \pi/2 - \alpha = \theta/2$.

Finalement, $\vec{T}_2 = m_2 g (\sin \frac{\theta}{2} \vec{e}_x + \cos \frac{\theta}{2} \vec{e}_y)$

3. À l'équilibre dans R galiléen, la somme des forces appliquées à m_1 est nulle soit $\vec{P} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = \vec{0}$

d'où $\vec{T}_1 = -\vec{P} - \vec{T}_2 \Rightarrow \vec{T}_1 = -m_2 g \sin \frac{\theta}{2} \vec{e}_x + g(m_1 - m_2 \cos \frac{\theta}{2}) \vec{e}_y$

4. $\vec{M}_O(\vec{P}) = \vec{OA} \wedge \vec{P} = (a \cos \theta \vec{e}_x - a \sin \theta \vec{e}_y) \wedge (-m_1 g \vec{e}_y)$

soit $\vec{M}_O(\vec{P}) = -m_1 a g \cos \theta \vec{e}_z$

5. $\vec{M}_O(\vec{T}_2) = \vec{OA} \wedge \vec{T}_2 = (a \cos \theta \vec{e}_x - a \sin \theta \vec{e}_y) \wedge (m_2 g (\sin \frac{\theta}{2} \vec{e}_x + \cos \frac{\theta}{2} \vec{e}_y))$

$\vec{M}_O(\vec{T}_2) = a g m_2 [\cos \theta \cos \frac{\theta}{2} + \sin \theta \sin \frac{\theta}{2}] \vec{e}_z$

Rq: on peut simplifier cette expression en écrivant

$\cos \theta \cos \frac{\theta}{2} + \sin \theta \sin \frac{\theta}{2} = \cos \frac{\theta}{2} (2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 1) + \sin \frac{\theta}{2} \cdot 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$

$= \cos \frac{\theta}{2} \{ 2(\cos^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2}) - 1 \} = \cos \frac{\theta}{2}$

finalemment, $\vec{M}_O(\vec{T}_2) = a g m_2 \cos \frac{\theta}{2} \vec{e}_z$

6. Comme $\vec{T}_1 \parallel \vec{OA}$ on a $\vec{M}_O(\vec{T}_1) = \vec{0}$

7. Théorème du moment dynamique en O à m_1 , à l'équilibre, la somme des moments est nulle:

$\vec{M}_O(\vec{P}) + \vec{M}_O(\vec{T}_1) + \vec{M}_O(\vec{T}_2) = \vec{0}$

soit $a g m_2 \cos \frac{\theta}{2} - a g m_1 \cos \theta = 0$ ou $\frac{m_1}{m_2} \cos \theta = \cos \frac{\theta}{2}$ on en tire $\theta \in]0, \pi/2[$, $\cos \frac{\theta}{2} > \cos \theta \Rightarrow m_1 > m_2$.

8. L'angle d'équilibre satisfait l'équation précédente posons $c = \cos \frac{\theta}{2}$ et $\cos \theta = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 1 = 2c^2 - 1$

d'où l'équation $2 \frac{m_1}{m_2} c^2 - c - \frac{m_1}{m_2} = 0$

discriminant: $\Delta = 1 + 8(\frac{m_1}{m_2})^2 > 0$

solutions: $c_{\pm} = \frac{1}{2 \frac{m_1}{m_2}} [1 \pm \sqrt{1 + 8(\frac{m_1}{m_2})^2}]$

d'où de tel que

$\cos \frac{\theta_e}{2} = \frac{m_2}{2 m_1} [1 + \sqrt{1 + 8(\frac{m_1}{m_2})^2}]$

or sur $\theta \in]0, \pi/2[$ $\cos \frac{\theta}{2} > 0 \Rightarrow c_- < 0$ n'est pas possible et $m_1 > m_2$

* si $m_1 = m_2$: $\cos \frac{\theta_e}{2} = 1 \Rightarrow \theta_e = 0$

* si $m_1 \gg m_2$: $\cos \frac{\theta_e}{2} \approx \frac{2 \sqrt{1 + 8}}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta_e = \frac{\pi}{4}$ et $\theta_e = \frac{\pi}{2}$

Exercice 1:

1.1 pour une orbite circulaire, l'accélération est centrale et $\vec{a} = -\frac{v_0^2}{R} \vec{e}_\rho$ avec v_0 constante et R constant d'où, en appliquant le PFD au satellite dans $R_{géo}$:

$$m\vec{a} = -G \frac{mM}{R^2} \vec{e}_\rho = -m \frac{v_0^2}{R} \vec{e}_\rho \Rightarrow \boxed{v_0 = \sqrt{\frac{GM}{R}}}$$

Or, le champ de gravitation à la surface de la terre est

$$\vec{g}_0 = -\frac{GM}{R^2} \vec{e}_\rho \Rightarrow \boxed{g_0 = \frac{GM}{R^2}} \text{ et } \boxed{v_0 = \sqrt{g_0 R}}$$

1.2 période de l'orbite dans $R_{géo}$:

$$v_0 T_0 = 2\pi R \Rightarrow \boxed{T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g_0}}} \text{ et } v_0 = \frac{2\pi R}{T_0}$$

1.3. Pour un point de l'équateur terrestre: $v_E T_1 = 2\pi R$

donc $\boxed{v_E = \frac{2\pi R}{T_1}}$ et $\boxed{\left(\frac{v_E}{v_0}\right)^2 = \left(\frac{2\pi R}{T_1} \frac{T_0}{2\pi R}\right)^2 = \left(\frac{2\pi}{T_1}\right)^2 \frac{R}{g_0}}$

1.4. A.N.: $\boxed{\left(\frac{v_E}{v_0}\right)^2 = 3,45 \cdot 10^{-3} \ll 1}$

1.5. Si S est immobile / surface de la terre (géostationnaire) on veut que $T = T_1$

$$g(z) = \frac{GM}{(R+z)^2} = \frac{GM}{R^2} \left(1 + \frac{z}{R}\right)^{-2} \text{ soit } \boxed{g(z) = g_0 \left(1 + \frac{z}{R}\right)^{-2}}$$

1.6. on a $\frac{v_1^2}{R_1} = \frac{GM}{R_1^2}$ soit $v_1 = \sqrt{\frac{GM}{R_1}}$ pour une orbite circulaire

ou $R_1 = \frac{GM}{v_1^2}$ avec $v_1 = \frac{2\pi R_1}{T_1} \Rightarrow \frac{R_1^3}{T_1^2} = \frac{GM}{(2\pi)^2}$ (R_{g} : c'est la troisième loi de Kepler)

soit $\boxed{R_1 = \left(\frac{GM}{(2\pi)^2}\right)^{1/3} T_1^{2/3}}$

On peut également écrire

$$\frac{R_1^3}{R^3} = \frac{T_1^2}{T_0^2} \text{ soit } R_1 = R \left(\frac{T_1}{T_0} \right)^{\frac{2}{3}}$$

pour x , on a $x = \frac{R_1}{R} = \left(\frac{T_1}{T_0} \right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{v_0}{v_1} \right)^{\frac{2}{3}} \approx 43.8$

1.7. on écrit $v_1^2 = \frac{GM}{R_1} = \frac{R}{R_1} \frac{GM}{R} \Leftrightarrow v_1 = \frac{v_0}{\sqrt{x}}$

1.8. Pour obtenir W , il faut calculer la différence entre l'énergie initiale et l'énergie finale dans $R_{\text{géo}}$

* à la surface de la terre au niveau de l'équateur

$$E_i = \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{GM}{R} m = \frac{1}{2} m \frac{v_0^2}{x^3} - m v_0^2 = K_0 \left(\frac{1}{x^3} - 2 \right)$$

* sur l'orbite C_1 :

$$E_f = \frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{GM}{R_1} m = -\frac{1}{2} m v_1^2 = -\frac{1}{2} m v_0^2 \frac{1}{x} = -\frac{K_0}{x}$$

N.B.: pour une orbite circulaire: $E_{\text{méca}} = -\frac{1}{2} m v^2$

du coup: $W = E_f - E_i = K_0 \left\{ 2 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} \right\} > 0$ car $x > 1$

N.B.: pour toute la suite, on pourra vérifier la limite $x \rightarrow 1$ dans les formules, pour laquelle rien ne se passe, $W=0$ etc...

1.9 Phase 1: sur C_0 , $E_0 = -\frac{1}{2} m v_0^2 = -K_0$

donc $W_1 = E_0 - E_i = K_0 \left(-1 + 2 - \frac{1}{x^3} \right) = K_0 \left(1 - \frac{1}{x^3} \right) > 0$
et s'annule en $x=1$

1.10 Il faut exprimer v_0' en fonction de v_0 et x

énergie sur la trajectoire elliptique: elle est conservée et

$$E = \frac{1}{2} m v_0'^2 - \frac{GM}{R} m = \frac{1}{2} m v_1'^2 - \frac{GM}{R_1} m$$

$$\text{soit } \boxed{v_0'^2 - v_1'^2 = 2 \frac{GM}{R} \left(1 - \frac{R}{R_1}\right) = 2 v_0^2 \left(1 - \frac{1}{x}\right)}$$

puis de la conservation du moment cinétique, on a

$$L = m R v_0' = m R_1 v_1' \quad \text{car } \vec{r} \perp \vec{v} \text{ en A et P}$$

$$\text{d'où } \boxed{v_1' = v_0' / x}$$

$$\text{On en déduit } v_0'^2 \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = v_0^2 \left(2 \frac{x-1}{x}\right) \Leftrightarrow v_0'^2 = v_0^2 \cdot 2 \frac{x}{x+1}$$

$$\text{soit } \boxed{v_0' = v_0 \sqrt{\frac{2x}{x+1}}} \quad \text{pour } x \rightarrow 1, v_0' = v_0 \text{ OK}$$

1.11. Il faut fournir de quoi augmenter l'énergie cinétique

$$W_2 = \frac{1}{2} m v_0'^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = K_0 \left\{ \frac{2x}{x+1} - 1 \right\}$$

$$\text{soit } \boxed{W_2 = K_0 \frac{x-1}{x+1}}$$

1.12. On reprend les relations ci-dessus:

$$\boxed{v_1' = \frac{v_0}{x} \sqrt{\frac{2x}{x+1}}} \quad [\text{égalité si } x \rightarrow 1]$$

1.13. Une nouvelle fois une différence d'énergie cinétique

$$W_3 = \frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{1}{2} m v_1'^2 = \frac{1}{2} m v_0^2 \frac{1}{x} - \frac{1}{2} m v_0^2 \frac{2}{x(x+1)}$$

$$= \frac{K_0}{x} \left\{ 1 - \frac{2}{x+1} \right\} = \frac{K_0}{x} \frac{x+1-2}{x+1} \Rightarrow \boxed{W_3 = \frac{K_0}{x} \frac{x-1}{x+1}}$$

Somme des travaux: $W_1 + W_2 + W_3 = K_0 \left\{ 1 - \frac{1}{x^3} + \frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{x} \frac{x-1}{x+1} \right\}$ Ouf!

$$= K_0 \left\{ 1 - \frac{1}{x^3} + \frac{x-1}{x+1} \frac{x+1}{x} \right\} = K_0 \left\{ 1 - \frac{1}{x^3} + 1 - \frac{1}{x} \right\} = \boxed{W}$$

1.14. La troisième loi de Kepler s'écrit ainsi pour une orbite elliptique de grand-axe $2a$ et de période T :

$$\boxed{\frac{T^2}{a^3} = \text{cste}}$$

la constante dépend uniquement de GM et donc est la même pour une planète donnée

On applique cette égalité à l'orbite C_1 et à l'orbite elliptique :

$$\frac{T_1^2}{R_1^3} = \frac{T^2}{a^3}$$

avec $2a = R + R_1$

et le temps de transit vaut $t = \frac{T}{2}$ (de P à A)

d'où le résultat:

$$t = \frac{T_1}{2} \left(\frac{a}{R_1} \right)^{3/2} = \frac{T_1}{2 \cdot 2\sqrt{2}} \left(\frac{R + R_1}{R_1} \right)^{3/2} \text{ et } x = \frac{R_1}{R}$$

soit

$$\boxed{t = \frac{T_1}{4\sqrt{2}} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{3/2}}$$

A.N.: $t \approx 4\text{h } 23\text{ min}$