

Motivations: étudier des effets temporels sans propagation.

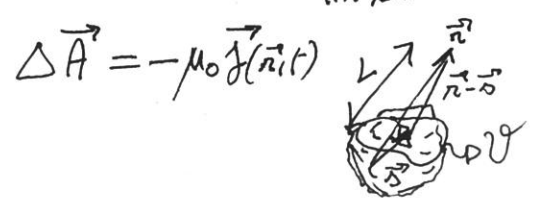
En gros: garder  $\partial_t \vec{E}$  ou  $\partial_t \vec{B}$  mais pas les deux.

obj: justifiez les approximations par des ordres de grandeurs (ou par la limite galiléenne des équations de Maxwell.)

Définition: **ARQS** régime où l'on peut négliger l'effet retard de la propagation dans les potentiels, i.e:

$$V(\vec{r}, t) \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho(\vec{s}, t)}{\|\vec{r}-\vec{s}\|} d^3s \quad \text{et} \quad \vec{A}(\vec{r}, t) \simeq \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{j}(\vec{s}, t)}{\|\vec{r}-\vec{s}\|} d^3s$$

soit l'approximation  $\Delta V = -\frac{\rho(\vec{r}, t)}{\epsilon_0}$   
ou néglige les dérivées temporelle.



justification et ordre de grandeur:

soit  $L$  la distance typique d'étude  
 $T$  le temps } il faut donc  $\frac{L}{T} \ll c$

soit  $\tilde{\rho}, \tilde{j}, \tilde{V}, \tilde{A}, \tilde{E}, \tilde{B}$  les valeurs typiques des sources, potentiels et  $V$  le volume où se trouve les sources champs

$\hookrightarrow \tilde{V} \sim \frac{\tilde{\rho} V}{\epsilon_0 L}$  et  $\tilde{A} \sim \frac{\mu_0 \tilde{j} V}{L}$  donne  $\frac{\tilde{V}}{c \tilde{A}} \sim \left[ \frac{\tilde{\rho} c}{\tilde{j}} \right]$

donc il faut déterminer si  $\tilde{\rho} c \gg \tilde{j}$  ou  $\tilde{j} \gg \tilde{\rho} c$  pour pouvoir simplifier les équations de Maxwell: (si  $\tilde{\rho} c \sim \tilde{j} \rightarrow$  pas de simplification)

1er cas:  $\tilde{\rho} c \gg \tilde{j}$  (limite électrique)

dans  $\vec{E} = -\underset{\tilde{V}/L}{\text{grad}} V - \underset{\tilde{A}/T}{\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}}$  donc  $\frac{\|\text{grad} V\|}{\|\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\|} \sim \frac{\tilde{V}}{L} \frac{T}{\tilde{A}} \sim \left( \frac{c}{L} \right) \left( \frac{\tilde{V}}{c \tilde{A}} \right) \gg 1$   
ou prend  $\vec{E} \simeq -\text{grad} V$

en revanche dans  $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

$$\frac{\|\frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\|}{\|\mu_0 \vec{j}\|} \sim \frac{1}{c^2 T} \frac{\tilde{V}}{L} \frac{1}{\mu_0 \tilde{j}} \sim \frac{\tilde{V}}{c^2 \mu_0 \epsilon_0 T L^2 \tilde{j}} \sim \frac{L}{c T} \frac{\tilde{V}}{\tilde{j} L^3} \sim 1$$

on aura un champ électrique dominant:

$$\frac{\|\vec{B}\|}{\|\vec{E}\|} \sim \frac{c \|\text{rot } \vec{A}\|}{\|\vec{E}\|} \sim \frac{c \tilde{A}}{\tilde{V}} \sim \frac{\tilde{j}}{\tilde{\rho} c} \ll 1 \Rightarrow$$

$\Delta$  fait brutalement  $c = \infty$  donne des absurdités si on le fait directement sur Maxwell

Dans cette limite:

magnétostatique "perturbée"

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{E} &= \rho / \epsilon_0 \\ \text{rot } \vec{E} &\approx \vec{0} \\ \text{div } \vec{B} &= 0 \\ \text{rot } \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

} quasi-électrostatique

} mesurable, donne des effets inductifs dans les condensateurs. "courant de déplacement"

gauge:  $\frac{\|\text{div } \vec{A}\|}{\|\frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}\|} \sim \frac{c T}{L} \frac{c \tilde{A}}{\tilde{V}} \sim 1$

on garde Lorentz

$$\text{div } \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

domaine d'application: condensateurs en régime variables

la charge et  $\vec{E}$  dominant. On a bien  $\text{div } \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

qui redonne  $I = \frac{dQ}{dt}$ .

2ème cas: limite magnétique  $\tilde{\rho} c \ll \tilde{j}$ :

il est clair dans ce cas que  $\frac{\|\frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\|}{\|\mu_0 \vec{j}\|} \ll 1$  et  $\frac{\|\text{grad } V\|}{\|\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\|} \sim 1$

de plus  $\frac{c \|\vec{B}\|}{\|\vec{E}\|} \gg 1$  et  $\vec{E} = -\text{grad } V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$

dans cette limite:

électrostatique "perturbée" {

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{E} &= \rho / \epsilon_0 \\ \text{rot } \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{div } \vec{B} &= 0 \\ \text{rot } \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} \end{aligned}$$

→ phénomène d'induction

} quasi-magnétostatique

→ applications: complexe bobine, électromécanique, fem, ...

gauge:  $\text{div } \vec{A} = 0$

Coulomb  $\leftrightarrow$  Lorenz dans cette limite

charge:  $\text{div } \vec{j} = 0$

sorte de loi des nœuds

Les limites galiléennes de l'électromagnétisme — retour sur l'ARQS

Limites galiléennes des équations de Maxwell à partir de la transformation de Lorentz

soit  $\vec{v} = (v_0, \vec{v})$  un quadri vecteur et  $\begin{cases} \vec{\beta} = \frac{\vec{u}}{c} \\ \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{cases}$

ou a:

$$\begin{cases} v_0' = \gamma (v_0 - \vec{\beta} \cdot \vec{v}) \\ \vec{v}'_{\parallel} = \gamma (\vec{v}_{\parallel} - \beta v_0) \\ \vec{v}'_{\perp} = \vec{v}_{\perp} \end{cases}$$

ou note:  $\tilde{v}_i$  l'ordre de grandeur de la composante et  $v = \|\vec{v}\|$  et  $\tilde{v}$  l'ordre de grandeur associé.

question: quelle transformation lorsque  $\beta \ll 1$  (limite galiléenne)?

trois cas: (i)  $\tilde{v}_0 \sim \tilde{v} \rightarrow \vec{v}$  est quasi de genre lumière pas de limite galiléenne possible

(ii)  $\tilde{v}_0 \gg \tilde{v}$ :  $\vec{v}$  est quasi de genre temps ( $\vec{v}^2 \approx v_0^2$ )

(iii)  $\tilde{v}_0 \ll \tilde{v}$ :  $\vec{v}$  espace ( $\vec{v}^2 \approx v^2$ )

On va avoir  $\gamma \approx 1$  dans la transformation mais il faut faire attention aux  $\beta$ : deux cas sont possibles suivant  $\frac{\tilde{v}_0}{\tilde{v}}$ :

cas (ii): 
$$\begin{cases} v_0' \approx v_0 \\ \vec{v}' \approx \vec{v} - v_0 \vec{\beta} \end{cases}$$

transformation de Galilé usuelle.

cas (iii): 
$$\begin{cases} v_0' \approx v_0 - \vec{\beta} \cdot \vec{v} \\ \vec{v}' \approx \vec{v} \end{cases}$$

transformation de "Caroll"

Exemples:  $\vec{X} = (ct, \vec{x})$  tel que  $\|\vec{x}\| \ll ct$ , on a bien

(2)

$$\begin{cases} t = t' \\ \vec{x}' = \vec{x} - \vec{u}t \end{cases}$$

• opérateur nabla:

on écrit  $x = \gamma(x' + \beta ct')$   
 $ct = \gamma(ct' + \beta x')$

qui donne 
$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial x}{\partial t'} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial t'} \frac{\partial}{\partial t} = \gamma \frac{\partial}{\partial t} + \gamma \beta c \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial x'} = \frac{\partial x}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial t} = \gamma \frac{\partial}{\partial x} + \gamma \beta \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \end{cases}$$

Ainsi  $\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} 1 \\ c \\ \frac{\partial}{\partial t} \\ -\vec{\nabla}' \end{pmatrix}$  est un quadri-vecteur. (tel que  $\vec{\nabla}^2 = \square$ )

soit  $\tilde{t}$  et  $\tilde{x}$  les variations typiques de temps et d'espace:

$$\tilde{v}_0 \sim \frac{1}{c\tilde{t}} \text{ et } \tilde{v} \sim \frac{1}{\tilde{x}} \Rightarrow \text{a priori } \frac{\tilde{v}_0}{\tilde{v}} \sim \frac{\tilde{x}}{c\tilde{t}} \ll 1$$

à la limite galiléenne

donc on doit avoir:

$$\begin{cases} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t'} \approx \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\vec{u} \cdot \vec{\nabla}}{c} \\ \vec{\nabla}' \approx \vec{\nabla} \end{cases}$$

c'est bien le résultat que l'on aurait obtenu en partant de la transformation de Galilée ci-dessus.

## Définition des limites électriques et magnétiques

(3)

on part du quadri-vecteur source de courant:

$$\vec{J} = (\rho c, \vec{j}) \quad \text{et l'on a } \vec{A} = \left(\frac{V}{c}, \vec{A}\right) \text{ le quadri-vecteur potentiel.}$$

(E) si  $\tilde{\rho}c \gg \tilde{j}$ : limite électrique:

dans ce cas, on s'attend à ce que  $\tilde{V} \gg c\tilde{A}$

et donc que  $\tilde{E} \gg c\tilde{B}$

c'est la même limite que discutée en premier lieu.

(M) si  $\tilde{\rho}c \ll \tilde{j}$ : limite magnétique:

dans ce cas, on s'attend à  $\tilde{V} \ll c\tilde{A}$  et  $\tilde{E} \ll c\tilde{B}$ .

Transformation des quadri-vecteurs  $\vec{J}$  à la limite galiléenne:

d'après les résultats précédents:

$$(E) \quad \begin{cases} \rho' = \rho \\ \vec{j}' = \vec{j} - \rho \vec{u} \end{cases}$$

$$(M) \quad \begin{cases} \rho' = \rho - \frac{\vec{u} \cdot \vec{j}}{c^2} \\ \vec{j}' = \vec{j} \end{cases}$$

Transformation des champs  $(\vec{E}, \vec{B})$  à la limite galiléenne:

on pourrait partir des potentiels et discuter les ordres de grandeur. Il est plus instructif de partir du résultat relativiste et de discuter les limites possibles lorsque  $\beta \rightarrow 0$ .

Du coup, on obtient:

$$\begin{cases} \vec{E}'_{\parallel} = \vec{E}_{\parallel} \\ \vec{E}'_{\perp} = \gamma [\vec{E}_{\perp} + \vec{u} \wedge \vec{B}] \\ \vec{B}'_{\parallel} = \vec{B}_{\parallel} \\ \vec{B}'_{\perp} = \gamma [\vec{B}_{\perp} - \frac{\vec{u} \wedge \vec{E}}{c^2}] \end{cases}$$

il faut alors faire attention à l'ordre de grandeur des différents termes: (4)

$$* \frac{|E_{\perp}|}{|\vec{u} \wedge \vec{B}|} \sim \frac{\tilde{E}}{\frac{u}{c} \tilde{B}}$$

(E)  $\triangleright$  très grand  $\Rightarrow$  on néglige  $\vec{u} \wedge \vec{B}$   
 $\gg 1$

(M)  $\triangleright \sim 1 \Rightarrow$  on garde les deux termes.

$$* \frac{|B_{\perp}|}{\frac{|\vec{u} \wedge \vec{E}|}{c^2}} \sim \frac{c \tilde{B}}{\tilde{E}} \frac{1}{\frac{u}{c}}$$

(E)  $\triangleright \sim 1 \Rightarrow$  on garde les deux termes

(M)  $\triangleright \gg 1 \Rightarrow$  on néglige  $\frac{\vec{u} \wedge \vec{E}}{c^2}$

de plus, il est légitime de faire  $\gamma \approx 1$ .

Conclusion: dans chacune des limites, les transformations des champs deviennent:

$$(E) \quad \begin{cases} \vec{E}' \simeq \vec{E} \\ \vec{B}' \simeq \vec{B} - \frac{\vec{u} \wedge \vec{E}}{c^2} \end{cases}$$

$$(M) \quad \begin{cases} \vec{B}' \simeq \vec{B} \\ \vec{E}' = \vec{E} + \vec{u} \wedge \vec{B} \end{cases}$$

N.B.: on peut vérifier (mais c'est assez long) que si l'on compose les transformations en considérant  $\vec{u}_{13} = \vec{u}_{12} + \vec{u}_{23}$ , les lois ci-dessus forment bien un groupe.

Si l'on avait fait brutalement  $\gamma = 1$  dans le résultat relativiste, comme c'est souvent fait dans les livres, on écrit

$$\begin{cases} \vec{E}' = \vec{E} + \frac{\vec{u}}{c} \wedge \vec{B} \\ c \vec{B}' = c \vec{B} - \frac{\vec{u}}{c} \wedge \vec{E} \end{cases} \quad (\text{incorrect})$$

(dans si  $\tilde{E} \sim c \tilde{B}$  ou quel cas, on peut faire  $\frac{u}{c} \rightarrow 0$  et on a  $\frac{\vec{E}'}{B'} = \frac{\vec{E}}{B}$  (trivial))

dont on peut constater que la composition de deux transformations ne redonne pas la même transformation.

# Équations de Maxwell dans ces limites :

(5)

comme justifié par la discussion des ordres de grandeur précédemment, on s'attend à ce que les équations de Maxwell s'approximent bien par les formes suivantes, selon les limites :

$$(E) \quad \begin{cases} \operatorname{div} \vec{E} = \rho / \epsilon_0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} = \vec{0} \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

$$(M) \quad \begin{cases} \operatorname{div} \vec{E} = \rho / \epsilon_0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} \simeq -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \end{cases}$$

On dispose maintenant d'équations dans un référentiel galiléen. On peut vérifier qu'elles conservent la même forme (invariance) lors d'une transformation de Galilée. Pour cela, on utilise les résultats sur les transformations des sources  $\vec{J}$ , de l'opérateur  $\vec{\nabla}$  et des champs  $(\vec{E}, \vec{B})$  (ou de  $F^{\mu\nu}$ ) dans chacun des cas :

cas (E): les deux premières équations sont trivialement invariantes puisque  $\vec{E}' = \vec{E}$ ,  $\rho' = \rho$  et  $\vec{\nabla}' = \vec{\nabla}$ .

pour les deux autres :

$$* \quad \vec{\nabla}' \cdot \vec{B}' = (\vec{\nabla}) \cdot \left( \vec{B} - \frac{1}{c^2} \vec{u} \wedge \vec{E} \right) \quad \text{et} \quad \operatorname{div}(\vec{u} \wedge \vec{E}) = \underbrace{\vec{E} \cdot \operatorname{rot} \vec{u}}_{\vec{0}} - \underbrace{\vec{u} \cdot \operatorname{rot} \vec{E}}_{\vec{0}}$$
$$= \vec{\nabla} \cdot \vec{B}$$

$$* \quad \vec{\nabla}' \wedge \vec{B}' = \vec{\nabla} \wedge \left( \vec{B} - \frac{1}{c^2} \vec{u} \wedge \vec{E} \right) \quad \text{et} \quad \operatorname{rot}(\vec{u} \wedge \vec{E}) = \underbrace{\vec{u} \operatorname{div} \vec{E}}_{\vec{0}} - \underbrace{(\vec{u} \cdot \operatorname{grad}) \vec{E}}_{\vec{0}} - \underbrace{[\vec{E} \operatorname{div} \vec{u} - (\vec{E} \cdot \operatorname{grad}) \vec{u}]}_{\vec{0}}$$

$$\text{et} \quad \mu_0 \vec{j}' + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}'}{\partial t'} = \mu_0 (\vec{j} - \rho \vec{u}) + \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \operatorname{grad} \right) \vec{E}$$

en utilisant  $\operatorname{div} E = \rho / \epsilon_0$  et  $\mu_0 \epsilon_0 c^2 = 1$ , on trouve bien que cette dernière est invariante.

cas (M): cette fois, ce sont les deux dernières qui sont triviales: (6)

$$\left. \begin{aligned} * \vec{\nabla}' \cdot \vec{E}' &= \operatorname{div} \vec{E} + \operatorname{div} (\vec{u} \wedge \vec{B}) \\ &\quad - \vec{u} \cdot \operatorname{rot} \vec{B} = -\mu_0 \vec{u} \cdot \vec{j} \end{aligned} \right\} \operatorname{div}' \vec{E}' = \rho' / \epsilon_0$$

et  $\rho' = \rho - \frac{1}{c^2} \vec{j} \cdot \vec{u}$ ,  $\mu_0 = \frac{1}{c^2 \epsilon_0}$

$$\left. \begin{aligned} * \operatorname{rot}' \vec{E}' &= \operatorname{rot} \vec{E} + \operatorname{rot} (\vec{u} \wedge \vec{B}) \\ &\quad - \vec{u} \operatorname{div} \vec{B} - (\vec{u} \cdot \operatorname{grad}) \vec{B} \end{aligned} \right\} \operatorname{rot}' \vec{E}' = -\frac{\partial \vec{B}'}{\partial t'}$$

et  $-\frac{\partial \vec{B}'}{\partial t'} = -\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \operatorname{grad}\right) \vec{B}$

les limites sont donc cohérentes, les lois étant invariantes sous la transformation de Galilée  $\Rightarrow$  d'où le nom de limite galiléenne

Rq: \* on voit donc, indirectement, que l'ensemble des équations de Maxwell n'est, lui, pas invariant lors d'une transformation de Galilée. Il l'est sous une transformation de Lorentz.

\* historiquement, la limite magnétique des équations était connue puisqu'elle décrit les phénomènes magnétostatiques, électrostatiques et d'induction. Comme on le redécouvrira, on pourrait trouver la transformation des champs dans cette limite à partir de l'invariance de la force de Lorentz.

Maxwell a mis le bazar en introduisant le courant de déplacement  $\frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  qui brise cette limite mais a permis de prédire les ondes électromagnétiques (entre autres) qui furent observées peu après.



# Dualité dans la transformation des champs, force de Lorentz (7)

## et équations de Maxwell.

Rappelons la loi de transformation des champs relativiste:

$$\begin{aligned} \vec{E}'_{\parallel} &= \vec{E}_{\parallel} \\ \vec{E}'_{\perp} &= \gamma [\vec{E}_{\perp} + \vec{u} \wedge \vec{B}] \\ \vec{B}'_{\parallel} &= \vec{B}_{\parallel} \\ \vec{B}'_{\perp} &= \gamma \left[ \vec{B}_{\perp} - \frac{\vec{u} \wedge \vec{E}}{c^2} \right] \end{aligned}$$

ces lois sont clairement invariantes sous la transformation  $\mathcal{D}$  de dualité:

$$(\vec{E}, \vec{B}) \xrightarrow{\mathcal{D}} (c\vec{B}, -\vec{E}/c)$$

où  $c$  apparaît en raison de son rôle dimensionnel dans le système S.I.

Lorsque l'on passe aux limites galiléennes discutées ci-avant, on observe que  $\mathcal{D}$  fait passer de la transformation des champs électrique à celle magnétique. On pourrait s'y attendre puisque  $\frac{\vec{E}}{c\vec{B}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \frac{c\vec{B}}{\vec{E}}$ , où l'on voit le rôle des ordres de grandeur.

Cette observation permet de bien comprendre pourquoi il y a deux limites galiléennes: c'est lié à la cinématique du champ et pas directement à ses sources.

## dualité et équations de Maxwell:

on constate que les équations de Maxwell en présence de termes de sources ne sont pas invariantes selon cette dualité. De même, la force de Lorentz ne l'est pas non plus. On peut cependant introduire des charges magnétiques  $\rho_m$  pour rétablir cette symétrie (on les appelle également monopoles magnétiques), et tels que  $\text{div}(c\vec{B}) = \rho_m / \epsilon_0$

Afin de voir plus clairement la symétrie, on change (8)

d'unité pour les champs et les charges: (l'indice e correspond aux charges électriques, et m aux charges magnétiques)

$$\vec{E}^* = \vec{E}$$

$$\vec{B}^* = c\vec{B}$$

$$\rho_e^* = \rho_e / \epsilon_0$$

$$\rho_m^* = \rho_m / \epsilon_0$$

(de même pour les courants associés)

Dans ces variables, on aura:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E}^* &= \rho_e^* \\ \operatorname{div} \vec{B}^* &= \rho_m^* \\ \operatorname{rot} \vec{E}^* &= -\frac{1}{c} \left( \frac{\partial \vec{B}^*}{\partial t} + \vec{j}_m^* \right) \\ \operatorname{rot} \vec{B}^* &= +\frac{1}{c} \left( \frac{\partial \vec{E}^*}{\partial t} + \vec{j}_e^* \right) \end{aligned}$$

redonnent la conservation des charges  $\rho_m / \rho_e$

La symétrie de dualité donne dans ces variables

$$\begin{aligned} \rho_e^* &\rightarrow \rho_m^* \\ \rho_m^* &\rightarrow -\rho_e^* \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} \vec{E}^* &\rightarrow \vec{B}^* \\ \vec{B}^* &\rightarrow -\vec{E}^* \\ \vec{j}_e^* &\rightarrow \vec{j}_m^* \\ \vec{j}_m^* &\rightarrow -\vec{j}_e^* \end{aligned}$$

on voit alors que cet ensemble d'équations est invariant sous la dualité  $\mathcal{D}$ . On voit aussi que le seul  $c$  qui apparaît le fait de façon symétrique entre les deux rotationnels.

De même, on s'attend à ce que la force de Lorentz prenne une forme symétrique: si l'on écrit cela par unité

de volume, on aura:  $\vec{f} = \rho_e^* \vec{E}^* + \frac{\vec{j}_e^*}{c} \wedge \vec{B}^* + \rho_m^* \vec{B}^* - \frac{\vec{j}_m^*}{c} \wedge \vec{E}^*$

qui est invariante selon  $\mathcal{D}$ .

Dans la nature, les charges magnétiques n'ont jamais été observées mais ces remarques sur la dualité électrique/magnétique nous permettent de comprendre certaines limites des raisonnements habituellement présentés.

En particulier, revenons sur l'argument habituel qui (9) permet de déterminer la transformation des champs dans le cadre d'une physique galiléenne:

entre deux référentiels galiléens  $R$  et  $R'$ , on écrit l'invariance de la force de Lorentz sur une charge électrique  $q_e$ : (elle-même invariante!) animée d'une

$$\text{vitesse } \vec{v}/R, \vec{v}'/R': q_e (\vec{E}' + \vec{v}' \wedge \vec{B}') = q_e (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

avec l'addition des vitesses galiléennes:  $\vec{v}' = \vec{v} - \vec{u}$

$$\hookrightarrow \text{on projette selon } \vec{v}': \vec{v}' \cdot \vec{E}' = \vec{v}' \cdot \vec{E} + \vec{v}' \cdot (\vec{u} \wedge \vec{B})$$

$$\text{soit } \forall \vec{v}', \vec{v}' \cdot (\vec{E}' - \vec{E} - \vec{u} \wedge \vec{B}) = 0$$

$$\text{d'où l'on tire que } \boxed{\vec{E}' = \vec{E} + \vec{u} \wedge \vec{B}}$$

en réinjectant ce résultat dans la première égalité, on obtient  $\forall \vec{v}, \vec{v} \wedge (\vec{B}' - \vec{B}) = \vec{0}$  soit  $\boxed{\vec{B}' = \vec{B}}$ .

Ainsi, cette démonstration ne souffre d'aucune erreur mathématique mais on ne retrouve que la transformation des champs de la limite magnétique (M). On comprend alors que pour trouver la loi de transformation dans la limite électrique, il aurait fallu effectuer le raisonnement sur la force duale associée aux charges magnétiques  $\vec{f}_m = q_m (\vec{B} - \frac{\vec{v} \wedge \vec{E}}{c^2})$

on trouve alors

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{B}' &= \vec{B} - \frac{\vec{u} \wedge \vec{E}}{c^2} \\ \vec{E}' &= \vec{E} \end{aligned}}$$

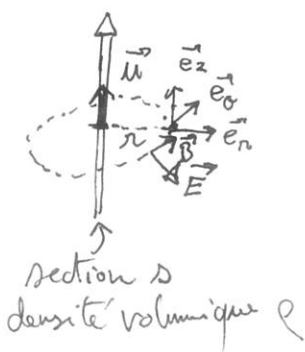
résultat qui, finalement ne dépend pas de l'existence ou non des  $q_m$ ...

# Exemples physiques et commentaires:

\* Les manuels représentent généralement que la limite magnétique pour les raisons suivantes: elle permet de décrire les phénomènes d'induction, de couplage électro-mécanique et concerne les régions dominées par les courants, sans accumulation de charges; d'autre part, c'est dans cette limite que la transformation des champs à partir de la force de Lorentz marche bien. Expérimentalement, cette limite telle que  $\tilde{\rho}c \ll \tilde{j}$  est réalisée grâce aux conducteurs qui sont essentiellement neutres électriquement aux basses fréquences ( $\tilde{\omega} \approx 0$ ) tout en pouvant être parcourus par de forts courants  $\tilde{j}$ .

\* La limite électrique correspond plus au domaine des condensateurs en régime alternatif. Cependant, pour expliquer certains phénomènes d'électrodynamique à toutes fréquences, il faut l'ensemble des équations de Maxwell. Un autre exemple très simple dans la limite électrique est celui d'un faisceau chargé homogène:

Dans R du labo:



Gauss sur une longueur  $l$ :  
$$2\pi r l E_r = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{\rho l \pi r^2}{\epsilon_0}$$

intensité:  $I = \frac{dq}{dt} = \rho \Delta \frac{dx}{dt} = \rho v \Delta$   
d'où 
$$\vec{E} = \frac{I}{2\pi \epsilon_0 r} \vec{e}_r$$

champ magnétique:  $2\pi r B_\phi = \mu_0 I$   
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\phi = \frac{\vec{u}}{c^2} \wedge \vec{E}$$

Dans R' attaché au

faisceau  
 charges fixes  $\Rightarrow \vec{B}' = \vec{0}$   
$$= \vec{B} - \frac{\vec{u}}{c^2}$$

$$\vec{E}' = \frac{I}{2\pi \epsilon_0 r} \vec{e}_r = \vec{E}$$

raison: quadri vecteur  $\vec{j}$   
 tel que  $\tilde{\rho}c \gg \tilde{j} = \tilde{\rho}u$  si  $u \ll c$