M1 Physique Appliquée — Université Paris-Sud XI
Année 2015-2016

Programmation et données numériques

TD2

Si vous n'avez pas fini le TD1, le début de la séance devrait être consacré à le terminer, tout au plus pendant 20min.

Création d'un histogramme

On rappelle qu'un histogramme représente le nombre d'occurrences de valeurs réelles $\{x_i\}$ sur des intervalles élémentaires que l'on supposera de largeur uniforme Δx et qui découpe un intervalle plus grand noté $[x_{\min}, x_{\max}]$. On appelle en anglais `bin` chacune des boîtes ainsi créées et on notera N leur nombre total. On représente alors par un trait horizontal de largeur Δx le résultat dans chaque boîte. Pour un même ensemble de données $\{x_i\}$, l'allure de l'histogramme dépend de Δx et il est souhaitable de normaliser celui de sorte que l'intégrale sous l'histogramme soit égale à un. Dans la plupart des cas rencontrés en physique, la limite où $\Delta x \to 0$ pour un nombre de données $M \to \infty$ correspondra à la densité de probabilité $p(x)$ de la variable x.

- ☞ Se faire un dessin au brouillon représentant un histogramme typique et les différents paramètres pertinents introduits ci-dessus.
- ☞ Écrire une fonction `Histogram(Liste,(xmin, xmax),N=10)` qui prend en argument une liste de données réelles `Liste` et qui trace l'histogramme des résultats dans un intervalle $[x_{\min}, x_{\max}]$ en le découpant en N intervalles élémentaires. Dans cette première version, on supposera implicitement que tous les éléments de la liste sont dans l'intervalle $[x_{\min}, x_{\max}]$. On notera `X` les abscisses de l'histogramme et `Y` ses ordonnées et le tracé se fera à l'aide de la fonction `plot` de `pylab` :

  ```
  plot(X,Y,'b')
  ```

  On souhaite enfin que la fonction retourne le couple `(bins,H)` où `bins` est une liste rassemblant les abscisses du début des boîtes et `H` l'histogramme normalisé.
  On pensera à utiliser l'opérateur division entière // pour obtenir l'indice de la boîte à remplir. D'autre part, pour créer des une courbe avec créneaux, vous allez devoir dédoubler les abscisses. Pour ce faire, on pourra utiliser une somme de deux listes ainsi que la fonction `sorted`. Vous allez sûrement devoir écrire cette fonction en tâtonnant et le mieux pour vérifier est de comparer vos premiers tracés avec ceux de la question suivante.
- ☞ Tracer alors les histogrammes de listes aléatoires de M échantillons obtenus avec les fonctions `uniform(-0.75,0.75)` de la bibliothèque `random` sur l'intervalle $[-1, 1]$. Observer qualitativement l'effet de la variation du nombre de boîtes et/ou du nombre d'échantillons. On tracera sur le même graphe les fonctions analytiques attendues.
- ☞ Si maintenant certains éléments de la liste n'appartiennent pas à l'intervalle $[x_{\min}, x_{\max}]$, la fonction précédente ne trouve pas les indices des boîtes de ces éléments et renvoie une erreur. Il faut donc filtrer la liste pour ne conserver que les éléments dans l'intervalle choisi puis faire attention à la normalisation qui doit tenir compte des éléments rejetés. Écrire une

nouvelle version de la fonction `Histogram(Liste,(xmin, xmax),N=10)` qui tienne compte de ce filtrage. *On rappelle qu'il existe une fonction* `filter` *pour les listes.*

☞ Tracer alors les histogrammes sur l'intervalle $[-1, 1]$ de listes aléatoires de M échantillons obtenus avec la fonction `gauss(0.0,`σ`)` avec divers écart-types σ . Vérifier le bon comportement, en particulier la normalisation, en traçant sur le même graphe la fonction analytique attendue, à savoir :

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-x^2/2\sigma^2} \ .$$

☞ Vérifier que votre fonction remplit le même rôle que la fonction `hist` de la bibliothèque `pylab`.

Une première simulation rapide en Python : la pomme d'arrosage

L'objectif de cette partie est d'obtenir la répartition sur le sol de la quantité d'eau envoyée par un pommeau d'arrosage. On effectue une modélisation sommaire en supposant que le pommeau émet des gouttes de masse m que l'on traitera comme des points matériels et qui sont soumises au champ de pesanteur avec $g = 9.81\,\mathrm{ms}^{-1}$. On notera $\vec{F}$ la résultante des forces pour le principe bien qu'il n'y ait qu'une force en jeu.

Algorithme de Verlet : Le temps est discrétisé en intervalles élémentaires de durée dt et on note $t_i = i \times dt$ les temps intermédiaires. On note enfin les positions dans le plan xOz $\vec{r}_i = (x_i(t_i), z_i(t_i)) = \vec{r}(t_i)$, $\vec{F}_i = \vec{F}(\vec{r}_i)$ et les accélérations $\vec{a}_i = \vec{a}(t_i) = \vec{F}_i/m$, en supposant que la force ne dépend que de la position. Le schéma d'intégration des équations du mouvement est donné par

$$\vec{r}_{i+1} = 2\vec{r}_i - \vec{r}_{i-1} + \vec{a}_i\, dt^2$$

qui provient simplement de la discrétisation de la dérivée seconde. L'initialisation se fait à l'aide d'un développement de Taylor :

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_0 + \vec{v}_0\, dt + \frac{1}{2}\vec{a}_0\, dt^2$$

Ce type d'algorithmes converge vers la solution exacte pour peu que $dt \to 0$.

On considère une seule goutte. Le mouvement se fait dans le plan xOz avec z la verticale. Les gouttes sont émises au temps $t = 0$ depuis une hauteur h en $x = 0$ et avec une vitesse initiale $\vec{v}_0 = v_0(\sin\theta\vec{e}_x + \cos\theta\vec{e}_z)$ et l'on utilisera l'angle θ comme paramètre.

☞ Écrire l'algorithme de Verlet sous forme d'une fonction `Verlet(r0,v0,tf,F,N=100)` qui prend en arguments les conditions initiales `r0` et `v0` sous forme de tuple, le temps final `tf`, la résultante des forces `F` sous forme d'un tuple `(Fx,Fz)` avec `Fx` et `Fz` deux fonctions, et qui renvoie un tuple `(x,z)` correspondant à la trajectoire $z(x)$ contenant `N` points.

☞ Représenter graphiquement les trajectoires obtenues pour $v_0 = 0.2$, $t_f = 0.5$, $N = 100$ et $\theta \in [\pi/5, \pi/4, \pi/3]$.

☞ Comparer à la solution exacte

$$z = h + \frac{1}{\tan(\theta)}x - \frac{g}{2v_0^2\sin^2\theta}x^2$$

☞ Tracer l'erreur commise en fonction du temps. Elle croît comme une puissance du temps : déterminer cette puissance.

☞ Tracer alors l'histogramme des résultats des positions obtenues au sol lorsque l'angle θ est parcouru uniformément dans $[\pi/5, \pi/3]$. *On pourra réfléchir au critère de contact avec le sol et l'approximer par une interpolation.*