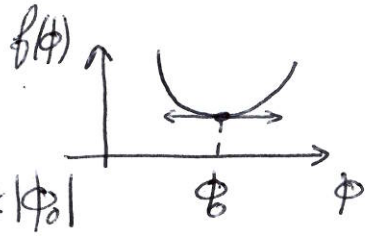
Propagation d'un front

A

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - f'(\phi)$$



1/ on se place dans une configuration où et on écrit $\phi(x,t) = \phi_0 + \eta(x,t)$ avec $|\eta(x,t)| \ll |\phi_0|$

alors la linéarisation de l'éq. ci-dessus donne :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - \eta\, f''(\phi_0) \quad \text{avec } f''(\phi_0) > 0$$

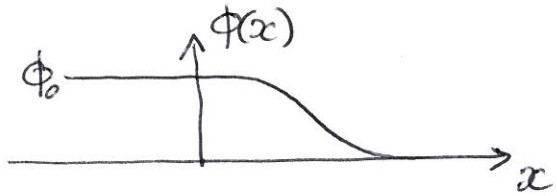
en écrivant $\eta(x,t) = \int_{\mathbb{R}} dq\, \hat{\eta}(q,t)\, e^{iqx}$ on obtient :

$$\frac{\partial \hat{\eta}}{\partial t} = -\left(q^2 + f''(\phi_0)\right)\hat{\eta} \quad \text{soit} \quad \hat{\eta}(q,t) = \hat{\eta}(q,0)\, e^{-(q^2 + f''(\phi_0))t}$$

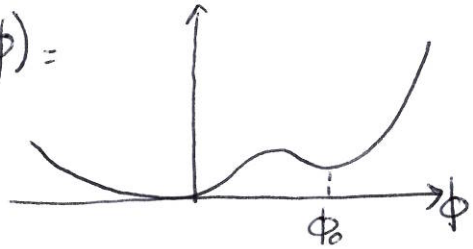
= fct clairement décroissante du temps $\xrightarrow[t\to\infty]{} 0$

il est donc clair que $\hat{\eta}(q,t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$

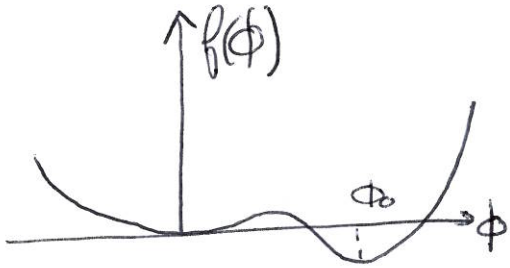
2/ Allure de la solution



allure de $f(\phi)$:



ou



l'interface va se propager vers la droite si la solution "ϕ_0" est favorable énergétiquement, c'est à dire si $f(\phi_0) < 0$ (dessin de droite).

Dans ce cas la solution $\phi = 0$ est métastable

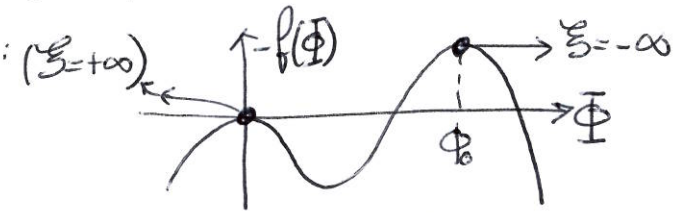
on cherche une solution se propageant à vitesse constante $V>0$. B

on pose $\xi = x - Vt$ et $\phi(x,t) = \Phi(\xi)$ on a alors :

$$\Phi'' = -V\Phi' - \frac{\partial(-f)}{\partial\Phi}$$

analogue de $\ddot{X} = -V\dot{X} - \frac{\partial U}{\partial X}$
où ici $U \overset{ici}{=} -f$ = potentiel
$V \overset{ici}{=}$ coef. de viscosité

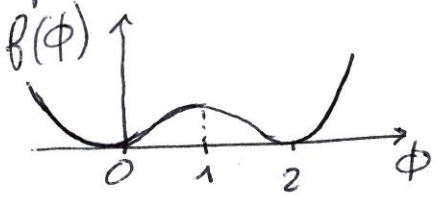
on a donc une particule classique évoluant dans le potentiel :



il faut donc que V soit bien choisie pour que la particule classique soit freinée juste assez pour s'arrêter à $\phi=0$.

cas particulier $V=0$ et $f(\phi_0)=0$. On précise les choses en écrivant :

$$f(\phi) = \frac{1}{4}\left[(\phi-1)^2-1\right]^2 =$$



$$f'(\phi) = -(\phi-1) + (\phi-1)^3 = (\phi-1)\left[-1+(\phi-1)^2\right]$$
$$= (\phi-1)(\phi^2-2\phi) = (\phi-1)\phi(\phi-2)$$

$$f''(\phi) = -1 + 3(\phi-1)^2 = \begin{cases} -1 & \text{si } \phi = 1 \\ 2 & \text{si } \phi = 0 \text{ ou } 2 \end{cases}$$

on veut résoudre $\Phi'' = \frac{\partial f}{\partial \Phi}$ en multipliant par Φ' cela donne :

$$\frac{d}{d\xi}\left[\frac{1}{2}(\Phi')^2\right] = \frac{df}{d\xi} \quad \text{soit} \quad \frac{1}{2}\Phi'^2 = f(\Phi) + C^{ste}$$

et la constante est nulle car lorsque $\xi \to \pm\infty$ on a Φ' et f qui tendent vers 0

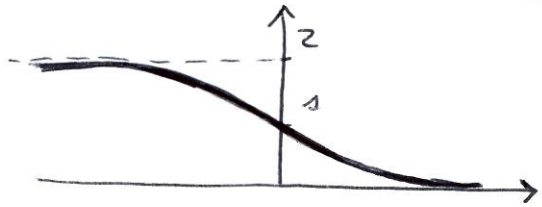
vue l'allure de la solution

on a $\Phi'<0$ et donc $\Phi' = -\sqrt{2f(\Phi)}$

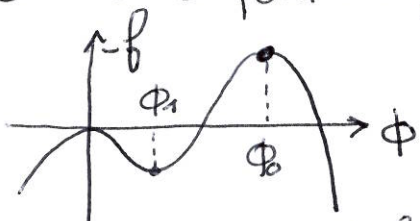
en posant $\Phi(x) = 1 + \psi(x)$ cela donne :

$$\psi' = \psi^2 - 1 \quad \left(\begin{array}{l}\text{on a bien } \psi^2 - 1 < 0 \\ \text{car } 0 < \Phi < 2 \text{ et donc } -1 < \psi < 1\end{array}\right)$$

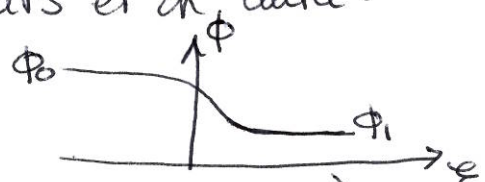
d'où $\psi(x) = -\mathrm{th}(x)$ et $\boxed{\Phi(x) = 1 - \mathrm{th}(x)}$



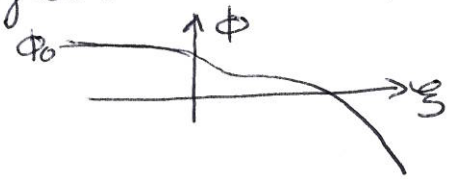
4/ configuration où $f(\phi_0) < 0$: on a pour le potentiel effectif :



* si l'amortissement est très fort (V très grande) la particule fictive tombera au fond du puits et on aura :



* si l'amortissement est très faible ($V \to 0$) on a très peu de dissipation et la particule fictive ira vers $\phi \to -\infty$:



5/ on écrit l'intégrale première : $\frac{1}{2}\Phi'^2 = f(\Phi)$ avec $f(\Phi) \simeq \ldots$ euh -- pardon -- cela ne marche pas à cause du "terme de viscosité" on a : $\Phi'' = -V\Phi' + \frac{\partial f}{\partial \Phi}$, avec au voisinage de zéro : $f(\Phi) \simeq \frac{1}{2} a \Phi^2$ avec $a > 0$.

d'où $\Phi'' = -V\Phi' + a\Phi$

on cherche une solution de la forme $\Phi = e^{r\xi}$ alors on a : $r^2 + Vr - a = 0$ solutions : $r = \frac{1}{2}\left[-V \pm \sqrt{V^2 + 4a}\right]$ seule la racine négative est acceptable. Cette analogie permet de déterminer numériquement le profil $\Phi(\xi)$ et la vitesse V par une méthode de shooting

6/ on a $\phi(\xi,t) = \Phi(\xi) + \eta(\xi,t)$

on pose $\begin{cases} \xi = x - Vt \\ \tau = t \end{cases}$ alors $\begin{cases} \dfrac{\partial(--)}{\partial x} = \dfrac{\partial(--)}{\partial \xi}\dfrac{\partial \xi}{\partial x} + \dfrac{\partial(--)}{\partial \tau}\dfrac{\partial \tau}{\partial x} = \partial_\xi(---) \\ \dfrac{\partial(--)}{\partial t} = \dfrac{\partial(--)}{\partial \xi}\dfrac{\partial \xi}{\partial t} + \dfrac{\partial(--)}{\partial \tau}\dfrac{\partial \tau}{\partial t} = -V\partial_\xi(--) + \partial_\tau(--) \end{cases}$

l'équation de propagation s'écrit : $\boxed{-V\partial_\xi \phi + \partial_\tau \phi = \partial_\xi^2 \phi - \dfrac{df}{d\phi}}$

$\eta(\xi,\tau) = A e^{-E\tau - V\xi/2}\,\psi(\xi)$ alors :

$$\partial_\xi \phi = \partial_\xi \Phi + \left(\partial_\xi \psi - \frac{V}{2}\psi\right) A e^{(--)}$$

$$\partial_\xi^2 \phi = \partial_\xi^2 \Phi + \left(\partial_\xi^2 \psi - V\partial_\xi \psi + \frac{V^2}{4}\psi\right) A e^{(--)}$$

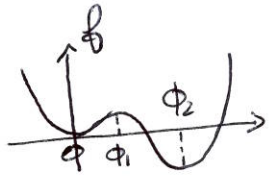
$$\partial_\tau \phi = -EA\psi e^{(--)}$$

en reportant dans l'éq. et en utilisant le fait que $-V\partial_\xi \Phi = \partial_\xi^2 \Phi - \dfrac{df}{d\phi}(\Phi)$

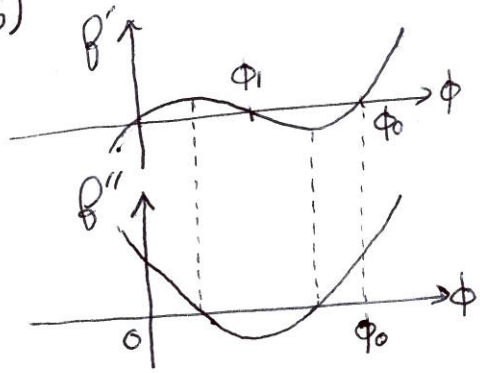
on obtient (en linéarisant $\dfrac{df}{d\phi}(\Phi+\eta)$) =

$$-\partial_\xi^2 \psi + \underbrace{\left[\frac{d^2 f}{d\phi^2}(\Phi(\xi)) + \frac{V^2}{4}\right]}_{U(\xi)}\psi = E\psi$$

on a =



et



et

comme $\Phi(\xi)$ varie de ϕ_0 à 0 lorsque ξ parcours $\mathbb{R}$

on a grossièrement :