

## Partie 1 : Relativité restreinte

dilatation des durées, contraction des longueurs, simultanéité.

### Exercice 1 Paradoxe de la règle et du trou

On étudie la situation schématisée sur la figure ci-dessous. On se place dans un référentiel galiléen  $\mathcal{R}$  doté des axes  $x$  et  $z$  et d'une horloge donnant  $t$ . Une règle de longueur propre  $L$  se déplace selon l'axe  $Ox$  à une vitesse constante  $\vec{u}$  proche de  $c$  (on prendra  $\gamma(\vec{u}) = 2$ ). Un plan percé d'un trou de largeur propre  $L$  se déplace lui selon l'axe  $Oz$  à une vitesse constante  $\vec{v}$  telle que  $\|\vec{v}\| \ll c$  de telle sorte que le mouvement du trou selon  $z$  sera considéré comme galiléen. Le mouvement est tel que le milieu de la règle atteint le milieu du trou à  $t = 0$  et coïncide avec l'origine  $O$ .

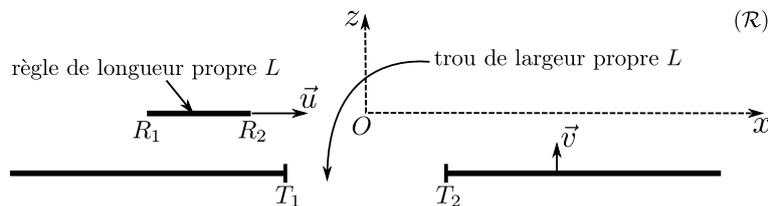


FIGURE 1.1 – Point de vue dans le référentiel  $\mathcal{R}$  à  $t < 0$ .

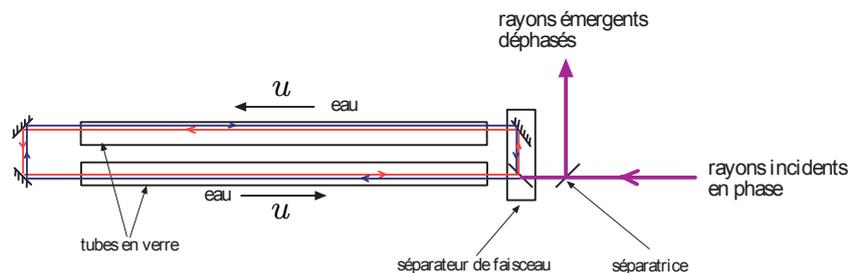
En raison de la contraction de la longueur de la règle dans  $\mathcal{R}$ , on s'attend à ce qu'elle passe largement dans le trou. Il apparaît un paradoxe si l'on se place dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  attaché à la règle et qu'on voit alors la largeur du trou rétrécir : la règle ne pourrait alors plus passer. En étudiant les coordonnées des extrémités  $R_{1,2}$  et  $T_{1,2}$  de la règle et du trou dans chacun des référentiels  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$ , lever le paradoxe.

composition des vitesses, ondes.

### Exercice 2 Expérience de Fizeau (1851)

- Rappeler la forme de la transformation de Lorentz entre deux référentiels galiléens  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  ayant une vitesse relative  $\vec{u}$  selon l'axe  $Ox$ . En déduire la loi de composition des vitesses lors du changement de référentiel sous forme vectorielle.

Le dispositif mis au point par Fizeau pour étudier la limite de validité de la loi de composition des vitesses galiléenne est schématisé sur la figure ci-dessous :



On y fait interférer deux faisceaux lumineux tournant en sens opposé par rapport à un écoulement d'eau de vitesse constante  $u$  dans deux tubes de longueur  $L$ . On crée en sortie un système de franges à l'aide d'un dispositif interférentiel.

- Montrer que la mise en écoulement de l'eau provoque un décalage des franges. On exprimera le déphasage  $\Delta\varphi$  entre les faisceaux en fonction de la vitesse de la lumière  $c$ , de  $L$ , de l'indice  $n$  de l'eau (défini dans le référentiel où le fluide est au repos), de  $u$  et de la longueur d'onde  $\lambda$ .
- L'effet relativiste est-il observable ?

On donne :  $n = 1.337$ ,  $\lambda = 526 \text{ nm}$ ,  $u \simeq 7.069 \text{ ms}^{-1}$ ,  $L = 1.487 \text{ m}$ .

### Exercice 3 Voyages dans l'espace-temps

Bien que ce ne soit pas systématiquement demandé, on s'efforcera de discuter la limite newtonienne des résultats obtenus, permettant au passage de vérifier leur cohérence.

#### Partie 1 Mouvement accéléré soumis à une force constante

On étudie ici le décollage d'une fusée soumise à une force constante  $\vec{f} = m\vec{g}$  dans le référentiel terrestre  $\mathcal{R}$  supposé galiléen. On considérera que la fusée se déplace uniquement le long de l'axe  $Ox \parallel \vec{f}$ . On notera  $x$  et  $t$  sa position au temps  $t$  dans  $\mathcal{R}$ , et  $v_x = dx/dt$ ,  $a_x = dv_x/dt$  les vitesses et accélérations dans ce référentiel. La fusée décolle de Houston en  $x = 0$  à  $t = 0$ .

1. En partant du principe fondamental de la mécanique appliqué à la fusée dans  $\mathcal{R}$ , déterminer les équations horaires  $x(t)$ ,  $v_x(t)$  et  $a_x(t)$  en fonction de  $g = \|\vec{g}\|$ ,  $t$  et  $c$ .

On donne (si besoin en fonction de la méthode utilisée) : 
$$\int^w \frac{du}{(1-u^2)^{3/2}} = \frac{w}{\sqrt{1-w^2}}.$$

2. Tracer la ligne d'univers correspondante. Discuter les cas limites. Montrer en particulier qu'après un certain laps de temps après le décollage que l'on déterminera, tout photon émis depuis Houston ne rattrapera pas la fusée.

La fusée a embarqué une horloge dont on note  $\tau$  le temps mesuré (temps propre dans le référentiel de la fusée). On pourra définir à chaque instant  $t$  un référentiel galiléen  $\mathcal{F}(t)$  se déplaçant à  $v_x(t)$ , ayant pour origine  $x(t)$  et coïncidant donc localement avec celui de la fusée.

3. Quelle est a priori la durée la plus grande entre  $t$  et  $\tau$ ? Trouver la relation entre  $\tau$  et  $t$ .

On donne : 
$$\int^w \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \operatorname{argsh}(w) = \ln(w + \sqrt{1+w^2}).$$

4. De même, quelle est la distance  $X$  qu'un cosmonaute a eu l'impression de parcourir depuis la fusée? On donnera  $X(t)$  puis  $X(\tau)$ .
5. Montrer que l'accélération est constante et égale à  $g$  dans le référentiel de la fusée.

Indication : on pourra utiliser la loi de composition des vitesses entre  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{F}(t)$ .

#### Partie 2 Paradoxe des jumeaux de Langevin (1911)

Igor et Grichka sont deux jumeaux terriens. Igor entreprend de faire un voyage spatial à une vitesse proche de celle de la lumière, et qu'on supposera rectiligne selon l'axe  $Ox$ . Après avoir rebroussé chemin, Igor rentre sur terre pour retrouver Grichka à qui il prétend être plus jeune en raison de la dilatation des durées. Grichka lui rétorque que si l'on prend son point de vue, c'est lui le plus jeune. Igor a-t-il raison?

1. Formaliser la controverse entre les deux frères en faisant l'hypothèse que le référentiel du vaisseau spatial est galiléen de vitesse relative  $\pm v$  par rapport à la terre tout au long du voyage. Cette hypothèse est-elle réaliste physiquement?
2. En se basant sur l'analyse du vol accéléré de la partie précédente, discuter le cas du voyage plus réaliste suivant : accélération constante à  $g$  puis décélération constante à  $-g$  jusqu'à inversion du sens de la marche puis de nouveau accélération pour se poser en douceur sur terre. Tracer l'allure typique de la ligne d'univers dans le référentiel terrestre.
3. Déterminer la formule donnant le rapport entre les deux temps propres de chacun des jumeaux en repartant des résultats de la partie précédente.
4. On considère dans un référentiel galiléen deux événements A et B de même abscisse  $x = 0$  et de coordonnées temporelles  $t_A$  et  $t_B$ . Quelle est la ligne d'univers de temps propre maximal entre ces deux événements?
5. Les voyages vers le futur sont-ils possibles en relativité restreinte? On précisera ce que l'on entend par futur. Et les voyages vers le passé?

Partie 3 Expérience d'Hafele et de Keating (1971)

Hafele et Keating ont réalisé une expérience se rapprochant de celle du paradoxe des jumeaux en synchronisant plusieurs horloges atomiques sur un tarmac puis en embarquant certaines pour des tours du monde soit vers l'est, soit vers l'ouest. Lorsque les horloges sont de nouveau réunies, on compare le temps mesuré, c'est-à-dire leurs temps propres.

On donne : vitesse typique d'un avion de ligne par rapport au sol  $v \approx 900 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$  ; rayon terrestre :  $R \approx 6400 \text{ km}$  ; durée typique du vol lors de l'expérience :  $t_{\text{vol}} \approx 2\pi R/v \approx 45 \text{ h}$ .

1. Par une simple estimation basée sur la dilatation des durées, estimer le décalage temporel entre une horloge au sol et une horloge embarquée dans un avion de ligne, initialement synchronisées. De combien de secondes rajeunit un pilote de ligne effectuant 1000h de vol par an sur une carrière de 30 ans ?
2. Lors de l'expérience, les horloges voyageant vers l'est sont, comme attendu, en retard par rapport à la sédentaire, mais celles voyageant vers l'ouest sont au contraire en avance, alors que  $\gamma$  ne dépend que du module de la vitesse. Comment expliquer cela (tout en restant dans le cadre de la relativité restreinte) ?

Dans la suite, on notera  $\mathbf{Q}$  un quadrivecteur, et  $\vec{Q}$  sa composante spatiale.

**Exercice 4 Collisions élastiques**

Une particule de masse  $m$  et d'énergie cinétique  $T$  entre en collision avec une autre particule de masse  $m$ , au repos. On note  $\vec{u}_x$  la direction de la particule incidente. À l'issue de la collision, les deux particules ont des énergies inégales, et leurs vecteurs vitesse  $\vec{v}_1'$  et  $\vec{v}_2'$  sont *a priori* inégalement inclinés sur la direction de la particule incidente :  $(\vec{v}_1', \vec{u}_x) \neq (\vec{v}_2', \vec{u}_x)$ . On note  $\alpha$  l'angle  $(\vec{v}_1', \vec{v}_2')$  entre ces deux vecteurs.

1. Montrer qu'en mécanique newtonienne,  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ .
2. Montrer qu'en relativité restreinte,  $\alpha$  est un angle aigu, et que dans le cas d'une collision symétrique  $((\vec{v}_1', \vec{u}_x) = (\vec{v}_2', \vec{u}_x))$ ,

$$\cos \alpha = \frac{T}{T + 4mc^2}.$$

**Exercice 5 Collisions inélastiques**

Partie 1 Notion de centre de masse

Soit un ensemble de  $N$  particules dont l'une au moins est de masse non nulle. On note  $\mathbf{p}(i)$  la 4-impulsion de la particule  $i$  dans le référentiel du laboratoire  $\mathcal{R}$ .

1. Montrer que la 4-impulsion totale  $\mathbf{P} = \sum_{i=1}^N \mathbf{p}(i)$  est un quadrivecteur de genre temps, i.e.  $\mathbf{P}^2 > 0$ .
2. En déduire qu'il existe un référentiel galiléen  $\mathcal{R}_{\text{CM}}$  dans lequel  $\vec{P} = \vec{0}$ . Montrer qu'il est défini par rapport à  $\mathcal{R}$  par sa vitesse :

$$\vec{\beta} = \frac{\sum_i \vec{p}(i)c}{\sum_i \mathcal{E}(i)}.$$

3. Vérifier que l'on retrouve le référentiel barycentrique à la limite non relativiste.

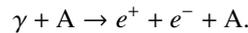
Partie 2 Matérialisation de photons par création de paire  $e^- e^+$

À haute énergie ( $h\nu > 100 \text{ MeV}$ ), le processus prépondérant dans l'absorption des photons par la matière est la création de paires électron-positron.

1. Montrer qu'un photon ne peut pas se matérialiser dans le vide d'après la réaction

$$\gamma \rightarrow e^+ + e^-.$$

2. La matérialisation nécessite donc la présence d'un catalyseur A qui intervient dans le bilan sous la forme



- (a) Quelle doit être l'énergie minimale  $\mathcal{E}^*$  des réactifs dans le référentiel du centre de masse pour que la réaction ait lieu ?  
 (b) En déduire, en repassant dans le référentiel du laboratoire  $\mathcal{R}$ , où A est supposé initialement immobile, l'énergie de seuil de la réaction.

Application aux cas où A est un électron et où A est un noyau atomique au repos. On rappelle que  $m_e c^2 \approx 0,5 \text{ MeV}$ .

## Partie 2 : Charges et champ magnétique

### Exercice 6 Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme

Une particule de charge  $q$  et de masse  $m$  se déplace dans un champ magnétique uniforme  $\mathbf{B} = B \mathbf{u}_z$ . À un instant que l'on prendra comme origine des temps, on repère sa position par  $\mathbf{r}_0 = x_0 \mathbf{u}_x$ , sa vitesse est  $\mathbf{v}_0 = v_0 \cos(\phi) \mathbf{u}_\theta + v_0 \sin(\phi) \mathbf{u}_z$ , avec  $\phi \in [0, \pi/2]$ , dans la base cylindrique construite autour de  $\mathbf{B}$ .

- Décrire le mouvement de la particule. Retrouver notamment le rayon de la trajectoire, la période de révolution et le pas de l'hélice.
- Stabilité de la trajectoire : On se restreint au cas où  $\phi = 0$ . La trajectoire est alors circulaire de rayon  $R$ , de vitesse angulaire  $\omega_c$ . On va étudier les petits mouvements autour de l'orbite d'équilibre. En coordonnées cylindriques, on développe au premier ordre selon

$$r = R(1 + \epsilon), \quad \dot{\theta} = \omega_c + \omega', \quad z = 0 + z.$$

- (a) Projeter la relation fondamentale dans la base cylindrique.  
 (b) Montrer qu'au premier ordre  $\omega' = -\omega_c \epsilon$ .  
 (c) Trouver l'équation différentielle qui régit le mouvement radial. Conclure quant à la stabilité radiale et orthoradiale de l'orbite.

### Exercice 7 Piégeage d'un électron dans le champ magnétique terrestre – Aurores boréales

Le champ magnétique terrestre est assimilé à celui d'un dipôle magnétique de moment  $\mathbf{M}$  placé au centre de la Terre.

- Champ produit par un dipôle magnétique : Calculer en premier lieu le potentiel vecteur à grande distance d'une boucle de courant  $C$  parcourue par un courant  $I$ , en ne gardant que les termes du premier ordre, qui correspondent au premier moment de la distribution de courant<sup>1</sup>. Montrer qu'il se met sous la forme

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 \mathbf{M} \wedge \mathbf{r}}{4\pi r^3} \quad \text{où} \quad \mathbf{M} = \frac{1}{2} \int_C I \mathbf{r}' \wedge d\mathbf{r}'.$$

Montrer ensuite que le champ magnétique créé s'écrit

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \left[ \frac{3(\mathbf{M} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r}}{r^2} - \mathbf{M} \right],$$

et donner son expression en coordonnées sphériques. Préciser la direction et le sens de  $\mathbf{M}$  pour la Terre. Le BRGM indique  $M \approx 8,3 \cdot 10^{22} \text{ A} \cdot \text{m}^2$  pour la Terre. Vérifier qu'en ordre de grandeur, on retombe bien sur la valeur connue du champ à la surface de la Terre.

1. Terme dipolaire

2. Un électron se déplace à la périphérie de la Terre. On travaille désormais dans la base sphérique à partir de  $(O, -\mathbf{M})$ . Retrouver l'expression de la composante de l'accélération selon  $\mathbf{u}_\phi$  dans le référentiel géocentrique supposé galiléen :

$$a_\phi = \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{d(\dot{\phi} r^2 \sin^2 \theta)}{dt}, \quad \text{et montrer que} \quad \dot{\phi} r^2 \sin^2 \theta + \frac{\mu_0 M e \sin^2 \theta}{4\pi m r} = K \text{ (cte).}$$

3. Montrer qu'on peut définir un potentiel effectif  $V(r, \theta)$  tel que

$$\frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + V(r, \theta) = \frac{1}{2} m v_0^2,$$

où  $v_0$  est la vitesse initiale de la particule. Le représenter à  $\theta$  fixé.

4. Après avoir retrouvé l'équation des lignes de champ du dipôle magnétique, vérifier qualitativement que le piégeage a lieu autour de ces lignes de champ. Ce sont les *ceintures de Van Allen*.
5. Donner une condition sur  $K$  pour qu'il y ait piégeage pour toute valeur de  $\theta$ , à  $v_0$  donné. Comprendre qu'il est plus facile de piéger à l'aplomb des pôles magnétiques qu'à l'équateur. Ceci explique pourquoi les aurores boréales ont préférentiellement lieu au delà des cercles polaires.
6. Cependant, des aurores boréales ont déjà été vues à Bombay et à Rome dans l'Antiquité lors de très violents orages magnétiques solaires pendant lesquels le plasma qui constitue le vent solaire est beaucoup plus dense et énergétique. On peut le comprendre à l'aide de ce modèle à partir d'arguments qualitatifs : en reprenant la condition de piégeage à tous angles, dans quelle limite pour  $K$  a-t-on piégeage de particules très énergétiques ? Quelles sont alors les ceintures mises en jeu dans le piégeage ? Vérifier qu'elles interceptent la surface du globe à des latitudes d'autant plus faibles que la particule piégée est énergétique.