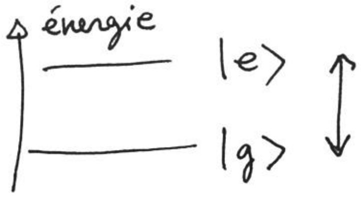
Correction Exam 2012
filière Capes et Master

Niveau excité avec temps de vie

1. 

$h\nu = E_e - E_g$ soit $\boxed{\nu = \dfrac{E_e - E_g}{h}}$

2. L'électron porte une charge électrique et une charge en mouvement émet du champ électromagnétique. Ce dernier peut emporter de l'énergie ce qui entraine une perte d'énergie de l'électron. Au niveau quantique, l'électron va passer d'un état excité à un niveau plus bas et l'énergie électro-magnétique est portée par le photon émis.

3. on a
$$\boxed{N(t+dt) = N(t) - \underbrace{N(t)}_{\text{population d'atomes pouvant se désexciter}} \underbrace{\frac{dt}{\tau}}_{\text{probabilité pour 1 atome de se désexciter entre } t \text{ et } t+dt}}$$

et $N(t+dt) \simeq N(t) + \dfrac{dN}{dt} dt$ d'où $\boxed{\dfrac{dN}{dt} = -\dfrac{N}{\tau}}$

4. solution : $\dfrac{dN}{N} = -\dfrac{dt}{\tau} \Rightarrow \ln \dfrac{N(t)}{\underbrace{N_0}_{\text{condition initiale}}} = -\dfrac{t}{\tau}$ et $\boxed{N(t) = N_0\, e^{-t/\tau}}$

d'où la probabilité d'être dans l'état excité $\boxed{P(t) = \dfrac{N(t)}{N_0} = e^{-t/\tau}}$

5. proba de "vivre" jusqu'à t $= \underbrace{P(t)}_{\text{proba d'être excité à } t} \times \underbrace{\dfrac{dt}{\tau}}_{\text{proba de "mourir" entre } t \text{ et } t+dt} = dp(t)$

temps de vie moyen : $\langle t \rangle = \int_{\underbrace{0}_{}}^{+\infty} t \; \underbrace{dp(t)}_{}$ proba d'avoir t comme temps de vie

temps de vie possibles — à moyenner

d'où $\boxed{\langle t \rangle = \int_0^{+\infty} \frac{t}{\tau} e^{-t/\tau} dt \overset{x = t/\tau}{=} \tau \underbrace{\int_0^{+\infty} dx \, x e^{-x}} = \tau}$

$\overset{IPP}{=} \underbrace{\left[-x e^{-x}\right]_0^{+\infty}}_{= 0} + \underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-x} dx}_{= 1}$

<u>τ est bien la durée de vie moyenne du niveau excité.</u>

<u>6. Equation de Schrödinger:</u> $\boxed{\hat{H} |\psi\rangle = i\hbar \frac{\partial |\psi\rangle}{\partial t}}$

<u>7.</u> On cherche $|\psi(t)\rangle = a(t) |g\rangle + b(t) |e\rangle$. Dans la base $\{|g\rangle, |e\rangle\}$ l'Hamiltonien s'écrit $\begin{pmatrix} E_g & 0 \\ 0 & E_e \end{pmatrix}$ donc l'équation de Schrödinger

donne $\begin{cases} \dot{a}(t) = -\frac{i}{\hbar} E_g a(t) \\ \dot{b}(t) = -\frac{i}{\hbar} E_e b(t) \end{cases}$ soit $\begin{cases} a(t) = a(0) e^{-iE_g t/\hbar} \\ b(t) = b(0) e^{-iE_e t/\hbar} \end{cases}$

d'après l'énoncé, $a(0) = 0$ et $b(0) = 1$ d'où $\boxed{|\psi(t)\rangle = e^{-iE_e t/\hbar} |e\rangle}$

<u>8. Probabilité d'être dans</u> $|e\rangle$: $|\langle e|\psi(t)\rangle|^2 = \underline{\left|e^{-iE_e t/\hbar}\right|^2 = 1}$

Il s'agit d'un <u>état stationnaire</u>.

<u>9.</u> On aura $|\psi(t)\rangle = e^{-i(E_e - i\gamma)t/\hbar} |e\rangle$ soit $P(t) = \left| e^{-\gamma t/\hbar} e^{-iE_e t/\hbar} \right|$

et $P(t) = e^{-2\gamma t/\hbar}$ donc $\boxed{\tau = \frac{\hbar}{2\gamma}}$

10. cf question précédente. On a $\langle \Psi(t) | \Psi(t) \rangle = \| |\psi\rangle \|^2 = e^{-2\gamma t/\hbar} < 1$

donc $|\Psi(t)\rangle$ n'est pas normalisée.

11. L'atome est soit dans $|e\rangle$ soit dans $|g\rangle$ donc $\boxed{P_g(t) = 1 - P(t)}$

énergie moyenne: $\langle E \rangle(t) = E_g \, P_g(t) + E_e \, P_e(t)$

$$\boxed{\langle E \rangle(t) = E_g + (E_e - E_g)\, e^{-t/\tau}}$$

L'énergie est dissipée.

N.B.: cette question reste qualitative, on ne peut obtenir dans cette approche phénoménologique $P_g(t)$ via $|\langle g | \Psi(t) \rangle|^2$ et $\langle E \rangle$ par $\langle \Psi(t) | \hat{H} | \Psi(t) \rangle$.

12. $\hat{H}^\dagger = \begin{pmatrix} E_g & \eta \\ \eta & E_e + i\gamma \end{pmatrix} \neq \hat{H}$ donc $\hat{H}$ n'est pas hermitique.

valeurs propres:

$$\begin{vmatrix} E_g - \varepsilon & \eta \\ \eta & E_e - i\gamma - \varepsilon \end{vmatrix} = 0 = (E_g - \varepsilon)(E_e - i\gamma - \varepsilon) - \eta^2$$
$$= \varepsilon^2 - (E_g + E_e - i\gamma)\varepsilon + E_g(E_e - i\gamma) - \eta^2$$

le discriminant est $\Delta = (E_g + E_e - i\gamma)^2 - 4(E_g(E_e - i\gamma)) + 4\eta^2$

$$= (\underbrace{E_g - E_e}_{-h\nu} + i\gamma)^2 + 4\eta^2$$

donc les valeurs propres sont $\boxed{\varepsilon_\pm = \frac{E_g + E_e - i\gamma}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(E_g - E_e + i\gamma)^2 + 4\eta^2}}$

13. Dans la limite de couplage faible: $\eta \ll |h\nu - i\gamma|$

$$\varepsilon_+ = \frac{E_g + E_e - i\gamma}{2} + \frac{1}{2}(E_e - i\gamma - E_g)\left(1 + \frac{4\eta^2}{(E_e - i\gamma - E_g)^2}\right)^{1/2}$$

$$\simeq \frac{E_g + E_e - i\gamma}{2} + \frac{1}{2}(E_e - i\gamma - E_g)\left(1 + \frac{2\eta^2}{(E_e - i\gamma - E_g)^2}\right)$$

soit $\boxed{\mathcal{E}_+ \simeq E_e - i\gamma + \frac{\eta^2}{h\nu - i\gamma}}$ car $h\nu = E_e - E_g$

De même, $\mathcal{E}_- \simeq \frac{E_g + E_e - i\gamma}{2} - \frac{1}{2}\left(E_e - i\gamma - E_g\right)\left(1 + \frac{2\eta^2}{(E_e - i\gamma - E_g)^2}\right)$

et $\boxed{\mathcal{E}_- \simeq E_g - \frac{\eta^2}{h\nu - i\gamma}}$

<u>14.</u> D'après les questions 8-10, si E, un complexe, est l'énergie d'un niveau, alors <u>$Re(E)$</u> pourra être considérée comme <u>son énergie</u> et <u>$Im(E)$</u> comme $-\frac{\hbar}{2\tau}$ où <u>τ est le temps de vie de l'état</u>

<u>nouvelles énergies:</u>

$$\boxed{\begin{aligned} E_+ &= Re(\mathcal{E}_+) = E_e + h\nu \frac{\eta^2}{(h\nu)^2 + \gamma^2} \\ E_- &= Re(\mathcal{E}_-) = E_g - h\nu \frac{\eta^2}{(h\nu)^2 + \gamma^2} \end{aligned}}$$

$$\left.\begin{aligned} -Im(\mathcal{E}_+) &= \gamma - \gamma \frac{\eta^2}{(h\nu)^2 + \gamma^2} = \gamma\left(1 - \frac{\eta^2}{(h\nu)^2 + \gamma^2}\right) \\ -Im(\mathcal{E}_-) &= \gamma \frac{\eta^2}{(h\nu)^2 + \gamma^2} \end{aligned}\right\} \boxed{\begin{aligned} \tau_+ &= \frac{\hbar}{2\gamma}\left(1 + \frac{\eta^2}{(h\nu)^2 + \gamma^2}\right) \\ \tau_- &= \frac{\hbar}{2\gamma} \frac{(h\nu)^2 + \gamma^2}{\eta^2} \end{aligned}}$$

on voit que τ_+ augmente avec le couplage tandis que τ_- diminue ($\tau_-(\eta = 0) = \infty$). Qualitativement, le <u>couplage mélange les niveaux</u> si bien que e est stabilisé par le couplage à un niveau stable tandis que g est destabilisé et acquiert un temps de vie fini.

15. Pour écrire l'équation de Schrödinger, on a besoin de

$$i\hbar \frac{\partial|\psi\rangle}{\partial t} = i\hbar\left(\dot{a}(t) - i\omega_g\, a(t)\right)e^{-i\omega_g t}|g\rangle + i\hbar\left(\dot{b}(t) - i\omega_e\, b(t)\right)e^{-i\omega_e t}|e\rangle$$

et

$$\hat{H}|\psi\rangle = \begin{pmatrix} E_g & \eta \\ \eta & E_e - i\gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a(t)\,e^{-i\omega_g t} \\ b(t)\,e^{-i\omega_e t}\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} E_g\, a(t)\,e^{-i\omega_g t} + \eta\, b(t)\, e^{-i\omega_e t} \\ \eta\, a(t)\, e^{-i\omega_g t} + (E_e - i\gamma)\, b(t)\, e^{-i\omega_e t}\end{pmatrix}$$

comme $\hbar\omega_g = E_g$ et $\hbar\omega_e = E_e$, on obtient

$$\begin{cases} i\hbar\, \dot{a}(t) = \eta\, b(t)\, e^{-i(\omega_e - \omega_g)t} \\ i\hbar\, \dot{b}(t) = -i\gamma\, b(t) + \eta\, a(t)\, e^{-i(\omega_g - \omega_e)t}\end{cases}$$

en notant $\left|\begin{array}{l}\Omega = \eta/\hbar \text{ et} \\ \gamma = \hbar/2\tau\end{array}\right.$ en utilisant $\omega_g = \omega_e$, cela se simplifie en

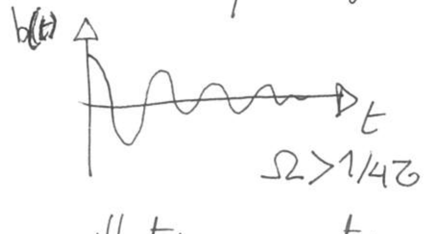
$$\boxed{\begin{aligned} \dot{a}(t) &= -i\Omega\, b(t) \\ \dot{b}(t) &= -i\Omega\, a(t) - \frac{1}{2\tau}\, b(t)\end{aligned}}$$

16. On reporte la première dans l'expression de $\ddot{b}(t)$:

$$\ddot{b}(t) = -i\Omega\, \underbrace{\dot{a}(t)}_{-i\Omega b(t)} - \frac{1}{2\tau}\dot{b}(t) \quad \text{soit} \quad \boxed{\ddot{b}(t) + \frac{1}{2\tau}\dot{b}(t) + \Omega^2 b(t) = 0}$$

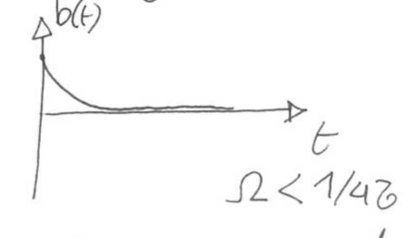
C'est l'équation d'un oscillateur harmonique classique amorti.

On sait qu'il y a alors 3 régimes en fonction de $\left(\frac{1}{2\tau}\right)^2 - 4\Omega^2$



oscillations amorties

régime "critique"



régime sous-amorti