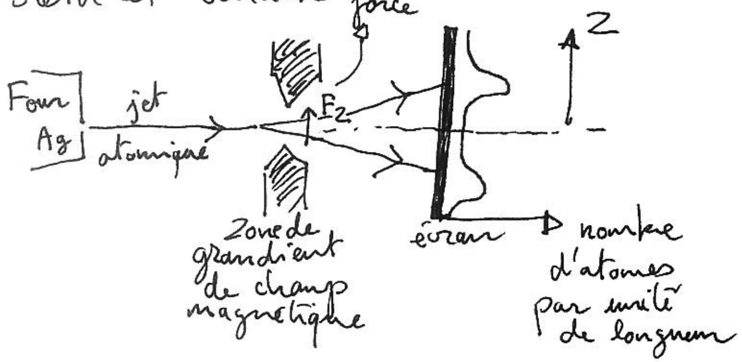
Examen Avril 2013
Filière Capes
et Master

Spin 1/2

1. le spin est un moment cinétique intrinsèque. Le neutron possède un spin 1/2.

2. Stern et Gerlach



Un jet atomique d'atomes d'Argent est envoyé dans une zone de fort gradient magnétique selon z. Les atomes subissent une force $\vec{\mu}\cdot\vec{\text{grad}}\,\vec{B} = \mu_z \partial_z B_z$ qui dévient le faisceau en fonction de leur moment magnétique μ_z selon z. La théorie quantique du moment cinétique orbital $\vec{L} = \vec{r}\wedge\vec{p}$ donne des projections quantifiées pour μ_z mais en nombre impair uniquement. Deux tâches seulement sont observées par Stern et Gerlach correspondant à un spin demi-entier $s = 1/2$.

3. La résonance magnétique nucléaire : analyse chimique ou IRM en médecine.

4. résultats possibles : $\boxed{\pm\frac{\hbar}{2}}$

probabilités : $\boxed{\begin{array}{l} P_+ = |\langle\psi|\uparrow\rangle|^2 \\ P_- = |\langle\psi|\downarrow\rangle|^2 \end{array}}$

5. valeurs propres de $\hat{S}_x$:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & \hbar/2 \\ \hbar/2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 = \lambda^2 - \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 \Rightarrow \boxed{\lambda = \pm\frac{\hbar}{2}}$$

même résultat que pour $\hat{S}_z$ ou $\hat{S}_y$ ou $\hat{S}_{\vec{u}} \Rightarrow$ ne dépend pas du choix de l'axe de projection.

6. vecteurs propres de $\hat{S}_x$:

pour $\pm\frac{\hbar}{2}$: $\hat{S}_x|\pm\rangle_x = \pm\frac{\hbar}{2}|\pm\rangle_x$

écrivons $|\pm\rangle_x = c_\uparrow|\uparrow\rangle + c_\downarrow|\downarrow\rangle$ alors

$$\hat{S}_x|\pm\rangle_x = \frac{\hbar}{2}(|\uparrow\rangle\langle\downarrow| + |\downarrow\rangle\langle\uparrow|)(c_\uparrow|\uparrow\rangle + c_\downarrow|\downarrow\rangle)$$
$$= \pm\frac{\hbar}{2}(c_\uparrow|\uparrow\rangle + c_\downarrow|\downarrow\rangle)$$

soit $c_\uparrow = \pm c_\downarrow$, après normalisation

$$\boxed{|\pm\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle \pm |\downarrow\rangle)}$$

7. probabilités :

$$p_\pm = |\langle\psi|\pm\rangle_x|^2$$

$$= \left|(\cos\theta\,\langle\uparrow| + \sin\theta\,\langle\downarrow|)(|\uparrow\rangle \pm |\downarrow\rangle)/\sqrt{2}\right|^2$$

$$= \frac{1}{2}(\cos\theta \pm \sin\theta)^2 = \frac{1}{2}\big(\underbrace{\cos^2\theta + \sin^2\theta}_{=1} \pm \underbrace{2\cos\theta\sin\theta}_{\sin 2\theta}\big)$$

$$\boxed{p_\pm = \frac{1}{2}(1 \pm \sin(2\theta))}$$ (on a bien $p_+ + p_- = 1$)

8. D'après le principe de réduction du paquet d'onde, l'état après la mesure est celui de l'état propre associé au résultat obtenu. Ici, il s'agit donc de $\boxed{|+\rangle_x}$.

Etalement du paquet d'onde et diffraction.

1. Equation de Schrödinger : $\boxed{i\hbar\frac{\partial|\psi\rangle}{\partial t} = \hat{H}|\psi\rangle}$

2. valeur moyenne : $\langle\hat{A}\rangle(t) = \langle\psi(t)|\hat{A}|\psi(t)\rangle$

écart quadratique : $\Delta A^2(t) = \langle\psi(t)|\hat{A}^2|\psi(t)\rangle - \langle\psi(t)|\hat{A}|\psi(t)\rangle^2$

3. $\hat{A}$ ne dépend pas explicitement du temps $\left(\frac{\partial\hat{A}}{\partial t} = 0\right)$

$$\frac{d}{dt}\langle\hat{A}\rangle = \frac{d}{dt}\langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle = \left(\frac{d}{dt}\langle\psi|\right)\hat{A}|\psi\rangle + \langle\psi|\hat{A}\left(\frac{d}{dt}|\psi\rangle\right)$$

or $\frac{d|\psi\rangle}{dt} = -\frac{i}{\hbar}\hat{H}|\psi\rangle$ et $\frac{d\langle\psi|}{dt} = +\frac{i}{\hbar}\langle\psi|\hat{H}$

d'où $\frac{d}{dt}\langle\hat{A}\rangle = +\frac{i}{\hbar}\left(\langle\psi|\hat{H}\hat{A}|\psi\rangle - \langle\psi|\hat{A}\hat{H}|\psi\rangle\right)$

$$\boxed{\frac{d\langle\hat{A}\rangle}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\langle[\hat{A},\hat{H}]\rangle}$$ car $[\hat{H},\hat{A}] = -[\hat{A},\hat{H}]$

4. $[\hat{A},\hat{B}\hat{C}] = \hat{A}\hat{B}\hat{C} - \hat{B}\hat{C}\hat{A} = \underbrace{\hat{A}\hat{B}\hat{C} - \hat{B}\hat{A}\hat{C}} + \underbrace{\hat{B}\hat{A}\hat{C} - \hat{B}\hat{C}\hat{A}}$

$$= [\hat{A},\hat{B}]\hat{C} + \hat{B}[\hat{A},\hat{C}]$$

5. $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m}$ à une dimension, m la masse de la particule

6. on utilise le théorème d'Ehrenfest :

$$\frac{d}{dt}\langle\hat{H}\rangle = \langle\underset{=0}{[\hat{H},\hat{H}]}\rangle/i\hbar = 0$$

$$\frac{d}{dt}\langle\hat{p}\rangle = \langle[\tfrac{\hat{p}^2}{2m},\hat{p}]\rangle/(-i\hbar) = \frac{-1}{2i\hbar m}\langle\hat{p}\underset{=0}{[\hat{p},\hat{p}]} + \underset{=0}{[\hat{p},\hat{p}]}\hat{p}\rangle = 0$$

donc $\langle\hat{H}\rangle = E_0$ et $\langle\hat{p}\rangle = p_0$ ne dépendent pas du temps, elles sont conservées au cours du mouvement

7. $[\hat{x},\hat{p}^2] = \hat{p}\underset{=i\hbar}{[\hat{x},\hat{p}]} + \underset{=i\hbar}{[\hat{x},\hat{p}]}\hat{p} = 2i\hbar\hat{p}$

8. on note $x_0 = \langle\hat{x}\rangle(t=0)$

on écrit $\frac{d\langle\hat{x}\rangle}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\left\langle\left[\hat{x}, \frac{\hat{p}^2}{2m}\right]\right\rangle$

$$\downarrow 7.$$

$$= \frac{1}{2i\hbar m}\langle 2i\hbar\hat{p}\rangle = \frac{\langle\hat{p}\rangle}{m} \quad \text{« } p_0 \text{ d'après 6.}$$

$$= \frac{p_0}{m}$$

d'où, en intégrant : $\boxed{\langle\hat{x}\rangle(t) = x_0 + \frac{p_0 t}{m}}$

9. pour $\hat{A} = \hat{x}^2$, il faut calculer $[\hat{x}^2, \hat{p}^2]$.

$$[\hat{x}^2, \hat{p}^2] = \hat{x}\underbrace{[\hat{x}, \hat{p}^2]}_{2i\hbar\hat{p}} + \underbrace{[\hat{x}, \hat{p}^2]}_{2i\hbar\hat{p}}\hat{x}$$

d'après 7.

$$= 2i\hbar(\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x})$$

d'où $\boxed{\frac{d\langle\hat{x}^2\rangle}{dt}} = \frac{1}{i\hbar}\left\langle\left[\hat{x}^2, \frac{\hat{p}^2}{2m}\right]\right\rangle$

$$= \frac{1}{2mi\hbar}\langle[\hat{x}^2, \hat{p}^2]\rangle = \boxed{\frac{1}{m}\langle\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x}\rangle}$$

on remarque que comme $\hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x} = i\hbar$, on peut écrire $\langle\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x}\rangle = 2\langle\hat{x}\hat{p}\rangle - i\hbar$

et $\frac{d^2\langle\hat{x}^2\rangle}{dt^2} = \frac{1}{m}\frac{d}{dt}(2\langle\hat{x}\hat{p}\rangle - i\hbar) = \frac{2}{m}\frac{d}{dt}\langle\hat{x}\hat{p}\rangle$

pour calculer $\frac{d}{dt}\langle\hat{x}\hat{p}\rangle$, on utilise de nouveau le théorème d'Ehrenfest : avec $\hat{A} = \hat{x}\hat{p}$

$$\frac{d}{dt}\langle\hat{x}\hat{p}\rangle = \frac{1}{i\hbar}\left\langle\left[\hat{x}\hat{p}, \frac{\hat{p}^2}{2m}\right]\right\rangle = \frac{1}{2mi\hbar}\langle\hat{x}\overset{0}{\overset{\parallel}{[\hat{p}, \hat{p}^2]}} + \underbrace{[\hat{x}, \hat{p}^2]}_{2i\hbar\hat{p}}\hat{p}\rangle$$

d'après 7.

$$= \frac{\langle\hat{p}^2\rangle}{m}$$

or $\langle\hat{H}\rangle = \frac{\langle\hat{p}^2\rangle}{2m} = E_0$ est une constante d'où

$\boxed{\frac{d^2\langle\hat{x}^2\rangle}{dt^2} = \frac{2}{m}(2E_0) = \frac{4E_0}{m}}$ est une constante

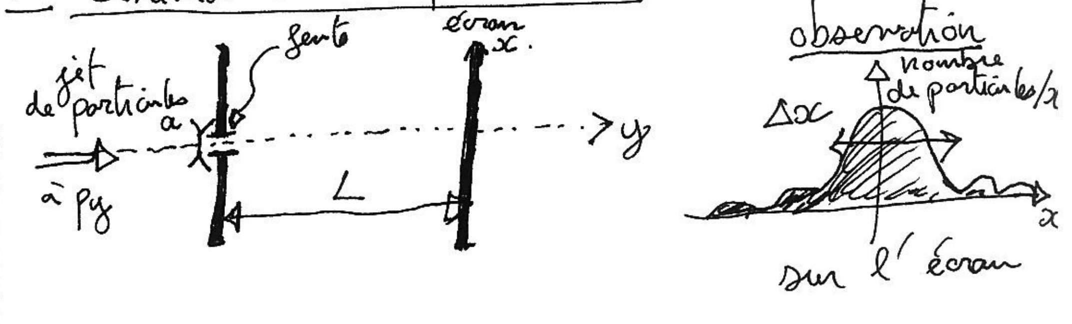
10. on peut alors intégrer l'équation

$$\frac{d\langle\hat{x}^2\rangle}{dt} = \underbrace{\left.\frac{d\langle\hat{x}^2\rangle}{dt}\right|_{t=0}}_{\frac{1}{m}\langle\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x}\rangle_0} + \frac{4E_0}{m}t$$

$\rightarrow$ état initial

puis $\boxed{\langle\hat{x}^2\rangle(t) = \langle\hat{x}^2\rangle_0 + \frac{\langle\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x}\rangle_0}{m}t + \frac{2E_0}{m}t^2}$

11. Schéma de l'expérience :



12. selon l'axe y on peut dire que si t est le temps de vol entre la fente et l'écran, on a la relation $\boxed{t = \frac{L}{v_y} = m\frac{L}{p_y}}$

l'écart-quadratique en position sur l'écran est obtenu à partir des formules (2) et (3) en prenant comme conditions initiales l'état au niveau de la fente.

$$\Delta x^2_{(t)} = \langle \hat{x}^2\rangle(t) - \langle \hat{x}\rangle^2(t)$$

$$= \frac{2E_0}{m}t^2 + \frac{\langle \hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x}\rangle_0}{m}t + \langle \hat{x}^2\rangle_0 - \left(x_0 + \frac{p_0}{m}t\right)^2$$

or $E_0 = \frac{\langle \hat{p}^2\rangle_0}{2m}$

$$= \frac{1}{m^2}\underbrace{\left(\langle \hat{p}^2\rangle_0 - p_0^2\right)}_{\Delta p_0^2}t^2 + \frac{\langle \hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x}\rangle_0 - 2x_0p_0}{m}t + \underbrace{\langle \hat{x}^2\rangle_0 - x_0^2}_{\Delta x_0^2}$$

et $\frac{t}{m} = \frac{L}{p_y}$ donne

$$\boxed{\Delta x^2_{(t)} = \Delta x_0^2 + 2CL + \frac{\Delta p_0^2}{p_y^2}L^2}$$

avec :

$\Delta p_0^2 = \langle \hat{p}^2\rangle_0 - p_0^2$

$\Delta x_0^2 = \langle \hat{x}^2\rangle_0 - x_0^2$

$C = \frac{1}{2}\frac{\langle \hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x}\rangle - 2x_0p_0}{p_y}$

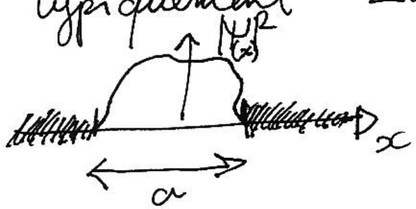
$\underline{\Delta p_0^2}$ est l'incertitude en impulsion au niveau de la fente selon la direction x.

$\underline{\Delta x_0^2}$ est " position "

$\underline{C}$ ~~représente~~ représente les corrélations impulsion-position

13. au niveau de la fente, la fonction est confinée selon x dans la fente de largeur a donc on a typiquement $\Delta x_0 \simeq a$.

$\underline{\text{en } t=0}$ et $x_0 \simeq 0$ par choix de l'origine.



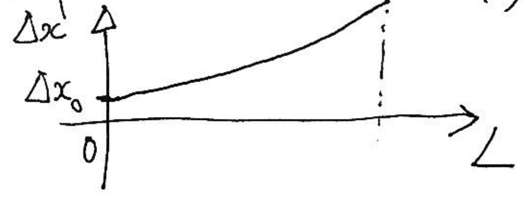
Relation d'incertitude de Heisenberg : pour $\hat{x}$ et $\hat{p}$

$$\boxed{\Delta x \Delta p \geqslant \frac{\hbar}{2}}$$

donc on peut évaluer $\Delta p_0 \sim \frac{\hbar}{\Delta x_0} \sim \frac{\hbar}{a}$

Ainsi, si $\Delta x_0 \ll \frac{\hbar}{p_y}\frac{L}{a}$ et $C \ll \left(\frac{\hbar}{p_y}\right)^2\frac{L}{a^2}$, on a essentiellement $\boxed{\Delta x \simeq \frac{\hbar}{p_y}\frac{L}{a} \propto \frac{1}{a}}$ inversement proportionnel à a.

on peut tracer sinon $\Delta x(L)$



c'est bien le phénomène analogue de la diffraction en optique.