Examen Mars 2014
filière Capes et Master

Mesure de l'anomalie du rapport gyromagnétique de l'électron

Le rapport gyromagnétique

1. $\boxed{\vec{L} = \vec{r} \wedge m\vec{v}}$ et $\vec{\mu} = \frac{1}{2}\vec{r} \wedge q\vec{v}$ donne $\vec{\mu} = \frac{q}{2m}\vec{L}$

soit $\boxed{\gamma_{cl} = \frac{q}{2m}}$

2. L'expérience de Stern et Gerlach. $\vec{S}\cdot\vec{u} \to \boxed{\pm\frac{\hbar}{2}}$

3. Les projections de $\vec{\mu}$ sont $\gamma(\pm\hbar/2) = \pm\mu_B$ avec $\boxed{\mu_B = \frac{gq\hbar}{4m}}$

ordre de grandeur : $\mu_B \simeq \frac{10^{-19}\,10^{-34}}{10^{-30}} = \underline{10^{-23}\ \mathrm{J\,T^{-1}}}$

Théorème d'Ehrenfest

4. $\boxed{i\hbar\frac{\partial|\psi\rangle}{\partial t} = \hat{H}|\psi\rangle}$ et $-i\hbar\frac{\partial\langle\psi|}{\partial t} = \langle\psi|\hat{H}^{+} = \langle\psi|\hat{H}$ car $\hat{H} = \hat{H}^{+}$

5. $\langle\hat{A}\rangle = \langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle \Rightarrow \frac{d\langle\hat{A}\rangle}{dt} = \frac{d\langle\psi|}{dt}\hat{A}|\psi\rangle + \langle\psi|\hat{A}\frac{d|\psi\rangle}{dt}$ car $\hat{A}$ ne dépend pas du temps

d'où $\frac{d\langle\hat{A}\rangle}{dt} = -\frac{1}{i\hbar}\langle\psi|\hat{H}\hat{A}|\psi\rangle + \frac{1}{i\hbar}\langle\psi|\hat{A}\hat{H}|\psi\rangle = \frac{1}{i\hbar}\langle\psi|\underbrace{\hat{A}\hat{H}-\hat{H}\hat{A}}_{[\hat{A},\hat{H}]}|\psi\rangle$

soit $\boxed{\frac{d\langle\hat{A}\rangle}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\langle[\hat{A},\hat{H}]\rangle}$ Théorème d'Ehrenfest

Le spin d'un électron en champ constant

$$\boxed{[\hat{S}_x,\hat{S}_y] = i\hbar\hat{S}_z\ ,\ [\hat{S}_y,\hat{S}_z] = i\hbar\hat{S}_x\ ,\ [\hat{S}_z,\hat{S}_x] = i\hbar\hat{S}_y}$$

6. $\mathcal{H}_{spin} = -\hat{\vec{\mu}}\cdot\vec{B} = -\hat{\mu}_z\cdot B = -\gamma B\hat{S}_z \Rightarrow \boxed{H_{spin} = -\gamma B\hat{S}_z}$

7. D'après le théorème d'Ehrenfest :

$$\frac{d\langle\hat{S}_x\rangle}{dt} = \frac{\langle[\hat{S}_x,\hat{H}]\rangle}{i\hbar} = \frac{1}{i\hbar}(-\gamma B)\langle\underbrace{[\hat{S}_x,\hat{S}_z]}_{=-i\hbar\hat{S}_y}\rangle = \gamma B\langle\hat{S}_y\rangle$$

$$\frac{d\langle\hat{S}_y\rangle}{dt} = \frac{1}{i\hbar}(-\gamma B)\langle[\hat{S}_y,\hat{S}_z]\rangle = -\gamma B\langle\hat{S}_x\rangle$$

$$\frac{d\langle\hat{S}_z\rangle}{dt} = \frac{1}{i\hbar}(-\gamma B)\langle\underbrace{[\hat{S}_z,\hat{S}_z]}_{0}\rangle = 0 \Rightarrow \boxed{\langle\hat{S}_z\rangle = \text{cste est conservée}}$$

posons $\omega_L \doteq |\gamma| B$, alors pour $\langle\hat{S}_x\rangle$ et $\langle\hat{S}_y\rangle$, on a:

$$\boxed{\frac{d\langle\hat{S}_x\rangle}{dt} = -\omega_L\langle\hat{S}_y\rangle \quad \text{et} \quad \frac{d\langle\hat{S}_y\rangle}{dt} = \omega_L\langle\hat{S}_x\rangle}$$

8. on a donc $\frac{d^2\langle\hat{S}_x\rangle}{dt^2} = -\omega_L\frac{d\langle\hat{S}_y\rangle}{dt} = -\omega_L^2\langle\hat{S}_x\rangle$ équation d'un oscillateur harmonique

solution: $\boxed{\langle\hat{S}_x\rangle(t) = S_x^0\cos(\omega_L t+\varphi)}$ (forme générale)

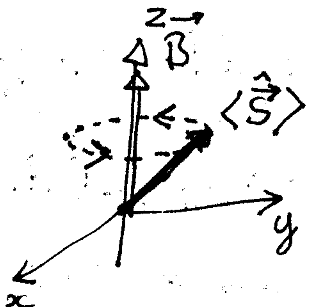
$$\langle\hat{S}_y\rangle(t) = -\frac{1}{\omega_L}\frac{d\langle\hat{S}_x\rangle}{dt} = -\frac{1}{\omega_L}\left(-\omega_L S_x^0\sin(\omega_L t+\varphi)\right)$$

$$\boxed{\langle\hat{S}_y\rangle(t) = S_x^0\sin(\omega_L t+\varphi)}$$

Dans le plan xy, le spin a un mouvement de rotation circulaire à la pulsation ω_L constante. Sa projection selon z reste constante. On peut donc représenter la trajectoire par un mouvement de précession autour de z

9. $[\hat{\vec{r}},\hat{\vec{p}}] = i\hbar \mathbb{1}_3$

$[\hat{r}_j,\hat{p}_k] = i\hbar\delta_{jk}$



ordre de grandeur de ω_L:

$$\omega_L = g\frac{|q|}{2m}B \simeq \frac{|q|}{m}B \simeq \frac{2.10^{-19}\cdot 10^{-2}}{10^{-30}} \simeq 2.10^{9}\,\text{Hz}$$

Mesure de l'anomalie a du rapport gyromagnétique

10. opérateur potentiel vecteur: $\hat{\vec{A}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\0\\B\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}\hat{x}\\\hat{y}\\\hat{z}\end{pmatrix} = \frac{B}{2}\begin{pmatrix}-\hat{y}\\\hat{x}\\0\end{pmatrix}$

commutateurs des vitesses:

$$[\hat{v}_j,\hat{v}_k] = \frac{1}{m^2}[\hat{p}_j-q\hat{A}_j,\hat{p}_k-q\hat{A}_k] = \frac{1}{m^2}(-q)\left\{[\hat{A}_j,\hat{p}_k]+[\hat{p}_j,\hat{A}_k]\right\}$$

* si $j=k$: $[\hat{v}_j,\hat{v}_j]=0$
* si $j=z$ ou $k=z$: $[\hat{A}_j,\hat{p}_z]=0$ si $j\neq z$ et $\hat{A}_z=0 \Rightarrow [\hat{v}_j,\hat{v}_z]=0$

* il ne reste que le terme $[\hat{v}_x, \hat{v}_y]$ à considérer :

$$[\hat{v}_x, \hat{v}_y] = -\frac{q}{m^2}\left\{[\hat{A}_x, \hat{p}_y] + [\hat{p}_x, \hat{A}_y]\right\} = -\frac{q}{m^2}\left\{\left(+\frac{B}{2}\right)\underbrace{[\hat{p}_y, \hat{y}]}_{=-i\hbar} + \frac{B}{2}\underbrace{[\hat{p}_x, \hat{x}]}_{=-i\hbar}\right\}$$

soit $$\boxed{[\hat{v}_x, \hat{v}_y] = i\hbar\frac{qB}{m^2}}$$

<u>commutateur avec $\hat{\vec{v}}^2$:</u>

* $\boxed{[\hat{v}_x, \hat{\vec{v}}^2]} = [\hat{v}_x, \hat{v}_x^2 + \hat{v}_y^2 + \hat{v}_z^2] = \hat{v}_y[\hat{v}_x, \hat{v}_y] + [\hat{v}_x, \hat{v}_y]\hat{v}_y \boxed{= i\hbar\frac{2qB}{m^2}\hat{v}_y}$
* $\boxed{[\hat{v}_y, \hat{\vec{v}}^2] =} = \hat{v}_x[\hat{v}_y, \hat{v}_x] + [\hat{v}_y, \hat{v}_x]\hat{v}_x \boxed{= -i\hbar\frac{2qB}{m^2}\hat{v}_x}$
* $\boxed{[\hat{v}_z, \hat{\vec{v}}^2] = 0}$

11. On peut écrire $\boxed{\hat{H} = \frac{1}{2}m\hat{\vec{v}}^2 - \gamma B\hat{S}_z}$ d'où :

* $[\hat{S}_z\hat{v}_z, \hat{H}] = \hat{S}_z\underbrace{[\hat{v}_z, \hat{H}]}_{=0} + \underbrace{[\hat{S}_z, \hat{H}]}_{=0}\hat{v}_z = 0$ car $[\hat{v}_z, \hat{S}_z] = 0$ et les relations précédentes

donc $\frac{dC_1}{dt} = \frac{\langle[\hat{S}_z\hat{v}_z, \hat{H}]\rangle}{i\hbar} = 0 \Rightarrow \boxed{C_1 \text{ est conservée}}$, $C_1 = \text{cte}$

* $$[\hat{S}_x\hat{v}_x + \hat{S}_y\hat{v}_y, \hat{H}] = \hat{S}_x[\hat{v}_x, \hat{H}] + [\hat{S}_x, \hat{H}]\hat{v}_x + \hat{S}_y[\hat{v}_y, \hat{H}] + [\hat{S}_y, \hat{H}]\hat{v}_y$$
$$= \hat{S}_x\left(\frac{m}{2}i\hbar\frac{2qB}{m^2}\right)\hat{v}_y + (-\gamma B)(-i\hbar\hat{S}_y)\hat{v}_x$$
$$+ \hat{S}_y\left(\frac{m}{2}\left(-i\hbar\frac{2qB}{m^2}\right)\right)\hat{v}_x + (-\gamma B)i\hbar\hat{S}_x\hat{v}_y$$
$$= i\hbar\underbrace{\left(\frac{qB}{m} - \gamma B\right)}_{=\frac{qB}{m} - 2(1+a)\frac{qB}{2m} = -a\frac{qB}{m} = \frac{2a}{2(1+a)}\frac{g|q|B}{2m} = \omega_L\frac{a}{1+a} = \Omega}[\hat{S}_x\hat{v}_y - \hat{S}_y\hat{v}_x]$$

où $\frac{g|q|B}{2m} = \omega_L$.

donc $\frac{dC_2}{dt} = \frac{\langle[\hat{S}_x\hat{v}_x + \hat{S}_y\hat{v}_y, \hat{H}]\rangle}{i\hbar} = \Omega\underbrace{\langle\hat{S}_x\hat{v}_y - \hat{S}_y\hat{v}_x\rangle}_{=C_3}$ soit $\boxed{\frac{dC_2}{dt} = \Omega C_3}$

l'énoncé donne $\boxed{\frac{dC_3}{dt} = -\Omega C_2}$

12. $\frac{d^2C_2}{dt^2} = \Omega\frac{dC_3}{dt} = -\Omega^2 C_2 \Rightarrow$ solution $\boxed{C_2(t) = C_2^0\cos(\Omega t + \varphi)}$

13. $G(t) = \langle \hat{\vec{S}} \cdot \hat{\vec{v}} \rangle (t) = \langle \underbrace{\hat{S}_x \hat{v}_x + \hat{S}_y \hat{v}_y}_{= C_2} \rangle + \underbrace{\langle \hat{S}_z \hat{v}_z \rangle}_{= C_1}$

soit $\boxed{G(t) = C_1 + C_2^0 \cos(\Omega t + \varphi)}$ et $\bar{G} = \frac{1}{T} \int_0^{T = 2\pi/\Omega} G(t) dt = 1 . C_1$

donc $\boxed{\frac{G(t)}{\bar{G}} = 1 + \frac{C_2^0}{C_1} \cos(\Omega t + \varphi)}$ $\Rightarrow$ signal oscillant à la pulsation Ω autour de 1

Sur la figure, on observe $\underline{T = \frac{2\pi}{\Omega} \simeq 3.10^{-6}\, s}$

comme $a \ll 1$, $\frac{a}{1+a} \simeq a$ et $a = \frac{\Omega}{\omega_L} \simeq \left(\frac{3.10^{-6}}{6}\right)^{-1} \frac{1}{2.10^9}$

ordre de grandeur de l'anomalie : $\boxed{a \simeq 10^{-3}}$