Examen du 8 avril 2013
filière Master

Désintégration de l'atome de tritium

1. $$\boxed{\hat{\mathcal{H}}_H = \frac{\hat{\vec{p}}^2}{2m_e} - \frac{e^2}{\hat{r}}}$$ avec $\hat{r} = \|\hat{\vec{r}}\|$

2. états liés de l'atome d'Hydrogène

$$\boxed{E_n = -\frac{\mathcal{R}}{n^2}} \quad \text{avec} \quad \underline{n = 1, 2, 3, \ldots}$$

3. pour n entier non-nul donné, on a

$\underline{\ell = 0, 1, \ldots, n-1}$ et $\underbrace{-\ell \leqslant m_\ell \leqslant \ell}_{2\ell+1 \text{ valeurs}}$

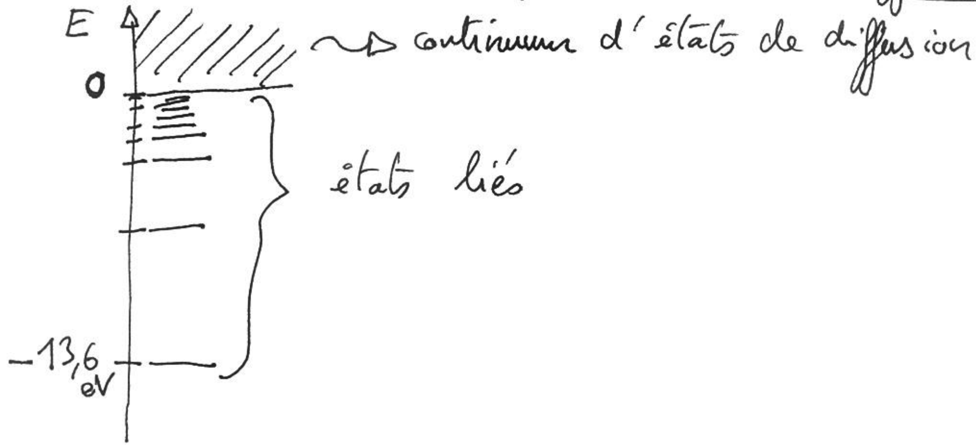
4. dégénérescence : pour un niveau n :

$$g_n = \sum_{\ell=0}^{n-1} (2\ell+1) = 2\sum_{\ell=0}^{n-1} \ell + n$$
$$= 2\,\frac{(n-1)(n-1+1)}{2} + n = n^2 - n + n$$

soit $\boxed{g_n = n^2}$

si on prend en compte le spin de l'électron on aura $\boxed{g_n = 2n^2}$

5. les états à $E > 0$ sont appelés <u>états de diffusion</u>



6. $Z = 2$; ${}^3_2He^+$ possède 2 protons, 1 neutron et 1 électron

7. La différence avec l'atome d'Hydrogène est que le noyau possède une charge $Z = 2$. On négligera l'effet du changement de masse du noyau.

$$\boxed{\hat{H}_{He^+} = \frac{\hat{\vec{p}}^2}{2m_e} - \frac{2e^2}{\hat{r}}}$$

nouveau rayon de Bohr : $\boxed{a'_B = \frac{\hbar^2}{\underbrace{m_e (2e^2)}_{\text{facteur } 2}} = \frac{a_B}{2}}$

le noyau plus chargé attire plus l'électron.

8. Avec les formules de l'énoncé, les niveaux d'énergie correspondent à $\frac{\hbar^2}{2m_e a_B'^2}$ soit $4R$ pour la "nouvelle" constante de Rydberg : $\boxed{E'_n = -\frac{4R}{n^2}}$ $\left(-\frac{Z^2 R}{n^2}\right)$

Les états propres de $\hat{H}_{He}$ sont les mêmes que ceux de $\hat{H}$ mais en substituant a_B' à a_B

Par exemple : $\underbrace{\boxed{\langle r,\theta,\varphi | He, 1,0,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi a_B'^3}} e^{-r/a_B'}}}$ est le fondamental de $\hat{H}_{He}$.

9. Il vient : $\boxed{\hat{H}_{He} = \hat{H}_H - \frac{e^2}{\hat{r}}}$

10. $\langle E\rangle = \langle H;1,0,0|\hat{H}_{He}|H,1,0,0\rangle$ d'après les hypothèses de l'énoncé.

$$= \underset{-R}{\underset{\parallel}{\langle H;1,0,0|\hat{H}_H|H,1,0,0\rangle}} - \underbrace{\langle H,1,0,0|\frac{e^2}{\hat{r}}|H,1,0,0\rangle}_{e^2 \frac{1}{a_B} \text{ formule (4) } (n=1)}$$

et $R = \frac{e^2}{2a_B}$ donc ce terme vaut $2R$

soit $\boxed{\langle E\rangle = -3R}$

A.N. : $\langle E\rangle = \underline{-40{,}8\ \text{eV}}$

11. l'électron est dans l'état $|H;1,0,0\rangle$ donc

$$\boxed{p_{n,l,m} = |\langle H;1,0,0|He;n,l,m\rangle|^2}$$

12. Comme $\langle l=0,m=0|l,m\rangle = 0$ si $(l,m)\neq(0,0)$ (rappel de l'énoncé) pour la partie angulaire, il en est de même pour $p_{n,l,m}$.

13. $p_1 = |\langle H;1,0,0|He;1,0,0\rangle|^2 = \left|\int d^3r\, \psi^*_{1,0,0}(\vec{r})\, \psi^{He^+}_{1,0,0}(\vec{r})\right|$

d'après 8. $= \frac{1}{\sqrt{\pi a_B'^3}} e^{-r/a_B'}$

d'où $p_1 = \left(\int_0^{+\infty} 4\pi r^2 dr\, \frac{1}{\sqrt{\pi a_B^3}} e^{-r/a_B} \frac{1}{\sqrt{\pi \frac{a_B^3}{2^3}}} e^{-2r/a_B}\right)^2$

coordonnées sphériques + isotropie

$$= \left(\frac{4\pi}{\pi a_B^3} 2^{3/2} \int_0^{+\infty} dr\, r^2 e^{-3r/a_B}\right)^2$$

$y = \frac{3r}{a_B}$

$$= \left(\frac{2^{7/2}}{a_B^3}\left(\frac{a_B}{3}\right)^3 \underbrace{\int_0^{+\infty} dy\, y^2 e^{-y}}\right)^2 = \left(\frac{2^{9/2}}{3^3}\right)^2 = \boxed{\frac{2^9}{3^6}}.$$

14. On a donc $\sum_{n=1}^{\infty} p_n \simeq 0{,}973\ldots^2 \neq 1$. Il y a donc une probabilité non nulle que l'électron se trouve sur un <u>état de diffusion</u> et non un état lié. Cela correspond au produit $\boxed{{}^3_2He^{2+}}$ → noyau d'Hélium complètement ionisé (particule α)