Chapitre 4

La forme de la Terre

1 Se repérer sur Terre

1.1 Coordonnées géographiques

Sur Terre, on peut tracer plusieurs familles de cercles :

- Les cercles parallèles, qui sont parallèles à l'équateur.
- Les cercles méridiens, qui passent par le pôle Nord et le pôle Sud.

Afin de repérer un lieu à la surface de la Terre, on utilise des coordonnées géographiques, c'est-à-dire deux angles :

- LA LONGITUDE : c'est l'angle qu'il faut parcourir d'ouest en est le long de l'équateur à partir du méridien de Greenwich [1], qui fait office de référence. On note cet angle λ (lambda).
- LA LATITUDE : c'est l'angle qu'il faut parcourir du sud au nord le long du méridien, à partir de l'équateur. On note cet angle ϕ (phi).

EXEMPLES : [2]

- Paris (2.3522229°O,48.856614°N)
- Alger (3.042048°O, 36.752887°N)
- New-York (-74.005941°O,40.712784°N)
  (on dit aussi (74.005941°E,40.712784°N))
- Madrid (-2.1417°O,37.7167°N)

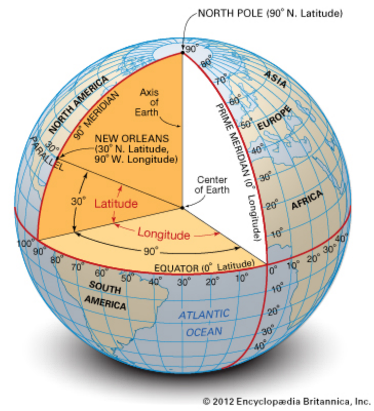

FIGURE 4.1: Pour se repérer sur Terre, on trace des cercles imaginaires : des cercles parallèles à l'équateur, et des méridiens qui passent par les pôles. Tout point peut alors être repéré par deux angles : la longitude λ, le long de l'équateur à partir du méridien de Greenwich et la latitude ϕ, le long d'un méridien à partir de l'équateur.

1. Le méridien de Greenwich passe à travers l'Observatoire royal de Greenwich, à Greenwich (banlieue de Londres), au Royaume-Uni

2. REMARQUE : Pour convertir en radians on multiplie l'angle en degrés par $\frac{\pi}{180}$.

1.2 Longueur d'un arc de méridien

Lorsque deux points M_1 et M_2 se situent sur une même longitude, on les trouve sur un même méridien. Si l'on représente ce méridien en coupe comme sur la figure 4.2, on s'aperçoit que la distance entre les deux villes, à vol d'oiseau correspond à la longueur d'un arc de cce cercle méridien.

À l'aide des latitudes ϕ_1 et ϕ_2 **exprimées en radians** [3], on peut mesurer cet arc de cercle

$$\boxed{d_{1-2} = R_T \left|\phi_1 - \phi_2\right|}$$

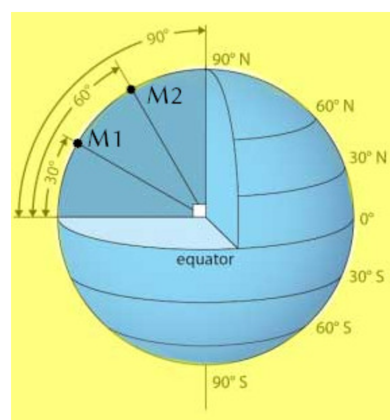

FIGURE 4.2: Vue en coupe du méridien terrestre qui contient les deux points M_1 et M_2. Leur distance à vol d'oiseau $d_{12} = R_T \left|\phi_1 - \phi_2\right|$. Où les latitudes ϕ_1 et ϕ_2 sont **exprimées en radians**

3. REMARQUE : Par définition, l'angle en radian, c'est le rapport entre la longueur d'un arc de cercle et le rayon de ce cercle

, où $R_T \simeq 6400$ km est le rayon de la Terre.

EXEMPLE : La distance à vol d'oiseau entre Paris et Alger est de 1347 km. En utilisant la formule ci-dessus et les coordonnées GPS de l'exemple section 1.1, on calcule 1351 km, l'écart relatif entre la caleur réelle et la valeur calculée est inférieur à 1% !

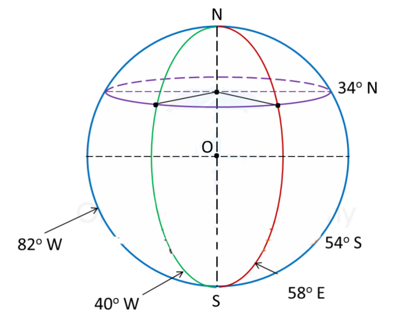

FIGURE 4.3: Vue en coupe du méridien terrestre qui contient les deux points M_1 et M_2. Leur distance à vol d'oiseau $d_{12} = R_T\,|\lambda_1 - \lambda_2|$. Où les latitudes λ_1 et λ_2 sont **exprimées en radians**

1.3 Longueur d'un arc de cercle parallèle

Lorsque deux points M_1 et M_2 se situent sur une même latitude, mais à des longitudes différentes, on les trouve sur un même cercle parallèle. Si l'on représente ce parallèle en coupe comme sur la figure 4.3, on peut chercher une formule qui donne la longueur de l'arc parallèle qui sépare les deux points en fonction de leurs coordonnées GPS.

À l'aide des latitudes λ_1 et λ_2 **exprimées en radians**, on peut mesurer cet arc de cercle

$$d_{1-2} = r(\phi)\,|\lambda_1 - \lambda_2|\,,$$

où $r(\phi)$ est le rayon du parallèle de latitude ϕ.

Pour calculer $r(\phi)$, représentons le méridien de Greenwich en coupe (voir fig. 4.4), en utilisant la relation $cos(\phi) = \frac{\text{adjacent}}{\text{hypothénuse}}$, on en déduit que

$$\boxed{d_{1-2} = R_T \cos(\phi)\,|\lambda_1 - \lambda_2|}$$

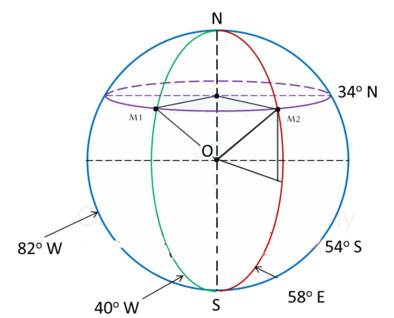

FIGURE 4.4: Cette vue du méridien en coupe nous permet d'illustrer que $r(\phi) = R_T \cos(\phi)$

EXEMPLE : La distance à vol d'oiseau entre Madrid et New York est de 5770 km. En utilisant la formule ci-dessus et les coordonnées GPS de l'exemple section 1.1, on calcule la longueur de l'arc de cercle parallèle qui les sépare : 6160 km, soit 7% d'écart relatif! On s'aperçoit donc que l'arc parallèle qui relie Madrid à New York n'est pas le plus court chemin qui les relie : il faudrait calculer un arc du grand cercle qui passe par ces deux villes pour se convaincre de notre approximation, ce calcul ne figure pas au programme de 1ES, nous ne l'aborderons donc pas.

1.4 Exercices :

ACTIVITÉ : "Se repérer sur Terre" p.139 Le Livre Scolaire.

2 Mesure d'un méridien

2.1 La méthode d'Ératosthène

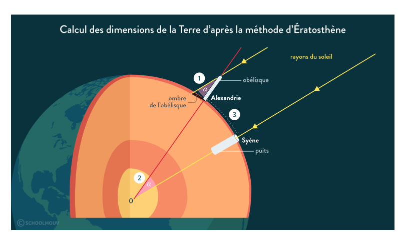

FIGURE 4.5: Le jour du solstice d'été à midi, le Soleil est au zénith de Syène, alors qu'il y a une ombre portée à Alexandrie. On remarque que l'angle entre les deux villes est α

Le principe de la méthode d'Ératosthène est le suivant : le Soleil est un astre si lointain que ses rayons arrivent sur Terre parallèles les uns aux autres. Si la Terre était plate, l'ombre de des objets sur Terre serait identique partout à un instant donné. Ce n'est pourtant pas ce que l'on constate : en effet si l'on plante deux bâtons à la verticale en deux points (Syène et Alexandrie), alors on s'aperçoit que leurs ombres sont de longueur différente : c'est donc que ces bâtons forment un angle différent avec les rayons du Soleil, ce qui prouve que la surface de la Terre est courbe.

Pour mesurer un méridien Terrestre, il suffit d'utiliser la formule $d_{1-2} = R_T \left|\phi_1 - \phi_2\right|$:

- On sait mesurer d_{1-2}, par exemple en la mesurant à dos de chameau.
- L'angle $\left|\phi_1 - \phi_2\right|$ n'est autre que l'ouverture angulaire entre les deux villes, exprimée en termes de latitudes (des angles par rapport à l'équateur). On sait mesurer cet écart angulaire très simplement le jour du solstice d'été grâce aux ombres des bâtons : en effet à midi, les rayons sont alignés avec la verticale de Syène mais forment une ombre avec un bâton à Alexandrie. La construction de la figure 4.5 montre alors que l'angle entre les rayons et l'ombre du bâton est aussi l'angle entre Syène et Alexandrie !

Il suffit alors de calculer $R_T = \frac{d_{1-2}}{\alpha}$ pour en déduire le rayon d'un méridien terrestre !

EXEMPLE :

ACTIVITÉ : p.138 « Détermination de la longueur du méridien par Ératosthène » Le Livre Scolaire.

D'après le raisonnement présenté ci-dessus, on a $R_T = \frac{500\times 157.7}{7.2\times\frac{\pi}{180}} = 6000\,\text{km}$ (Attention aux chiffres significatifs, le nombre de stades n'est donné qu'à un chiffre !)

L'écart relatif[4] avec la valeur en vigueur aujourd'hui est :

$$\epsilon = \left|\frac{R_{\text{XP}} - R_{\text{théorique}}}{R_{\text{théorique}}}\right| \simeq 6\%$$

4. Il faut connaître la définition de l'écart relatif

2.2 La méthode de Delambre et Méchain

2.3 Approche documentaire

ACTIVITÉ : p.140 « Mesure de la longueur du méridien terrestre par Delambre et Méchain » Le Livre Scolaire.

Delambre et Méchain furent missionnés pour effectuer la mesure d'un méridien terrestre, dans le but de définir le mètre. Dans la définition proposée à l'époque, la Terre était prise pour référence, et le périmètre d'un méridien valait, par définition 40 000 km.

Les deux scientifiques ont opté pour une méthode de triangulation pour effectuer cette mesure. La méthode de triangulation repose sur la mesure précise d'angles, plutôt que de distances, sujettes à trop d'incertitudes. On peut ensuite remonter aux distances à travers la formule des sinus

$$\frac{\sin(a)}{a} = \frac{\sin(b)}{b} = \frac{\sin(c)}{c}$$

Voir travail fait en classe.

À la fin de ce chapitre, je sais (extrait du B.O.) :: Savoirs

- Dès l'Antiquité, des observations de différentes natures ont permis de conclure que la Terre était sphérique, alors même que, localement, elle apparaît plane dans la plupart Calculer la longueur du méridien terrestre par des expériences quotidiennes.
- Historiquement, des méthodes géométriques ont permis de calculer la longueur d'un méridien (environ 40 000 km) à partir de mesures d'angles ou de longueurs : méthodes d'Ératosthène et de triangulation plane.
- On repère un point à la surface de la Terre par deux coordonnées angulaires, sa latitude et sa longitude. Le plus court chemin entre deux points à la surface de la Terre est l'arc du grand cercle qui les relie.

À la fin de ce chapitre, je sais (extrait du B.O.) :: Savoir-faire

- Calculer la longueur du méridien terrestre par la méthode d'Ératosthène.
- Calculer une longueur par la méthode de triangulation utilisée par Delambre et Méchain.
- Calculer le rayon de la Terre à partir de la méthodes d'Ératosthène et de triangulation longueur du méridien.
- Calculer la longueur d'un arc de méridien et d'un arc de parallèle.
- Comparer, à l'aide d'un système d'information géographique, les longueurs de différents chemins reliant deux points à la surface de la Terre.