SAMUEL CAZAYUS-CLAVERIE

CONDENSÉ D’ALGÈBRE LINÉAIRE À L’USAGE DES PHYSICIENS

UNIVERSITÉ PARIS-SACLAY 2018

PUBLISHED BY UNIVERSITÉ PARIS-SACLAY 2018

TUFTE-LATEX.GOOGLECODE.COM

First printing, October 2018

Table des matières

Introduction

Au quotidien, le physicien est amené à réaliser des modèles quantitatifs pour décrire son observation du réel. Prenons un exemple auquel vous avez sûrement été confrontés : on étudie un système à un degré de liberté ; le circuit *RLC* pour fixer les idées. Le degré de liberté est la charge stockée dans la capacité du circuit. On force ce circuit sinusoïdalement au secours d'un générateur, et l'on cherche à connaître sa réponse. Ce problème est assez simple, et l'on se demande alors ce qu'il advient en rajoutant un bloc LC -et donc un degré de liberté- on constate que le circuit admet alors deux fréquences de résonance. Intéressant... Poussé par la curiosité nous ajoutons un troisième bloc LC, puis un quatrième, un dixième, un millième ! Le problème devient difficile à étudier analytiquement : il nous faudrait une façon systématique de le résoudre : l'algèbre linéaire est l'outil de la situation ; elle permet de déterminer les fréquences de résonance du circuit, et la façon de le faire est automatisable.

En mécanique quantique, l'espace des états d'un système est un espace vectoriel, dit de Hilbert (c'est-à-dire, grossièrement, un espace vectoriel muni d'un produit scalaire, et sur lequel on peut définir l'analogue d'une base même en dimension infinie.).En mécanique du solide, les concepts de tenseur d'inertie, de matrice de raideur, de tenseur des contraintes sont des objets multilinéaires. Leur ignorance a mené le mathématicien Euler à des formules analytiques très lourdes dans son étude de la résistance des matériaux. Leur connaissance vous permettra de mener vos calculs avec élégance afin de vous concentrer plus en profondeur sur l'aspect physique des phénomènes.

De façon plus conceptuelle, on peut s'intéresser à la réponse à un signal causal contrôlé par un opérateur : l'aimantation d'un aimant en réponse à un champ magnétique ou la polarisation d'un isolant en réponse à un champ électrique, la tension en sortie d'un circuit circuit en réponse à une tension d'entrée ... Ce problème est difficile en général, mais sous réserve de faiblement perturber le système par rapport à une configuration d'équilibre, nous observons un fait intéressant : la réponse du système est doublée lorsque l'opérateur double la perturbation ; le signal obtenu en sortie de la somme de signaux est la somme des signaux que l'on obtiendrait sinon. Cette propriété dite de linéarité, est très générale et amène avec elle l'espoir d'un traitement systématique de ces problèmes : la théorie de la réponse linéaire.

Ce cours est réparti en six séances de 4 heures, partagées en 2h de cours et 2h TD. S'il est suffisant à une initiation aux concepts de l'algèbre linéaire, cet impératif horaire ne me permet pas de détailler les preuves des théorèmes et propriétés que j'énonce. J'ai ainsi pris le risque que ces notes de cours ressemblent à une longue suite de définitions et propriétés. Néanmoins, je crois fermement que les définitions sont essentielles : elles vous permettront d'acquérir le langage clair qui accompagne les idées précises. Je ne saurais que trop vous inviter à vous documenter par vous-même au sujet des preuves (ou à les retrouver par vous-mêmes !). Ce faisant, vous apprécierez la beauté d'un raisonnement mathématique bien mené tout autant que vous comprendrez mieux les concepts étudiés.

Bien évidemment, je reste à votre disposition pour répondre à vos questionnements.

Bonne réussite !

Rappel de définitions

0.1 Introduction

[1]

1. BLALB

Cette partie préliminaire rappelle les définitions qui ont pu gêner les étudiants à qui j'enseignais ce cours. Du fait de la variété de leurs parcours, certains les connaissaient, et d'autre pas.

DÉFINITION 1 (Groupe).
Un ensemble G, muni d'une *loi de composition interne* $* : G \times G \to G$ est appelé groupe si

- $\exists e \in G, \forall g \in G, g * e = e * g = g$
- $\forall g \in G, \exists g_s, g * g_s = g_s * g = e$

Autrement dit, il existe un élément neutre pour la loi $*$ et tout élément de G admet un *élément symétrique* pour cette loi.

Remarque. • Autrement dit, un groupe, c'est un ensemble sur lequel on s'autorise des additions et des soustractions entre paires d'éléments.

- Cette façon de munir un ensemble d'un loi de composition interne est générique en mathématiques. Pour le comprendre, il faut remarquer que cela nous a pris du temps, étant enfants, pour apprendre par coeur des tables d'addition et de multiplication, et que ces tables sont arbitraires.

Exemples.

- L'ensemble $\mathbb{N}$ muni de la loi $+$ n'est pas un groupe car il ne contient pas les nombres négatifs.
- L'ensemble $\mathbb{Z}$ est un groupe pour la loi $+$, mais pas pour la loi $\times$ car in ne contient pas les fractions.
- L'ensemble $\mathbb{Q}$ est un groupe pour les lois $+$ et $\times$.

DÉFINITION 2 (Corps).
Un ensemble G, muni de *loi de composition interne* $* : G \times G \to G$ et est appelé groupe si

- $(G, +)$ est un groupe commutatif.

- (G, x) est un groupe.
- $+$ est distributive sur $\times$.
- $\times$ est distributive sur $+$

Autrement dit, un corps est un ensemble sur lequel on peut utiliser les lois $+$, $-$, $\times$, / sauf par zéro, et sur lequel ont peut effectuer les factorisations / distributions usuelles.

Remarque.

E

Exemples.

- $(\mathbb{Q}, +, \times)$ est un corps.
- $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps.
- $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps.
- L'ensemble des quaternions $(\mathbb{H}, +, \times)$ est un corps, sous réserve de définir les lois $+$ et $\times$. On le nomme ainsi en hommage à Hamilton qui les a découverts.

FIGURE 1: Table de multiplication des quaternions imaginaires purs i, j et k sur le pont de Broom à Dublin, en hommage à Hamilton qui l'avait gravée.

DÉFINITION 3 (Famille).
Soit E un ensemble, alors on appelle famille d'éléments de E l'ensemble des $e_i \in E, i \in I$, où I est un ensemble fini, ou infini numérotable par des entiers (on dit alors que I est dénombrable).

Autrement dit, il s'agit d'un ensemble d'éléments de E fini ou numérotable par des entiers.

Exemples.

- (a, b, e, g) est une famille de lettres de l'alphabet.
- $(\vec{i}, \vec{j})$ est une famille de vecteurs du plan. (Notation usuelle des vecteurs de base de $\mathbb{R}^2$

DÉFINITION 4 (Produit cartésien de deux ensembles).
Soient A et B deux ensembles, alors on appelle produit cartésien de A et B, et on note $A \times B$ l'ensemble :

$$A \times B = \{(a, b), a \in A, b \in B\}$$

C'est l'ensemble des couples d'élements de A et de B. En itérant l'application du produit cartésien $n \in \mathbb{N}$ à plusieurs ensembles on obtient l'ensemble des n-uplets de ces ensembles. On montre en théorie des ensembles que $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$ et que le parenthésage est donc superflu.

Exemples.

- $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) | x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$ est l'ensemble des couples de nombres réels. Dans les chapitres à venir, nous le ferons hériter des opérations de somme sur $\mathbb{R}$ et de multiplication par un réel pour le munir d'une structure d'espace vectoriel et l'interpréter comme l'ensemble des points du plan.
- L'ensemble des paires de boules dans un sac est l'ensemble produit cartésien de l'ensemble des boules du sac.

DÉFINITION 5 (BLABLA).
APPLICATION, INJECTIVITÉ, SURJECTIVITÉ, Bijectivité, dessin

1
Espaces Vectoriels

1.1 Introduction

[1]

A la différence du physicien, le mathématicien échafaude des théories sur la base d'axiomes : un certain nombre de propositions qui -si elles ne se contredisent pas- sont prises pour vraies et permettent d'établir des théorèmes au moyen de la logique la plus formelle. Cette approche est très puissante, car elle permet de construire des structures mathématiques abstraites dont la portée est très générale.

En algèbre, la "recette" employée pour bâtir une structure de travail est la suivante : on se donne un ensemble d'éléments, puis on le munit d'un certain nombre d'opérations sur ces éléments. Si cette façon de faire peut sembler artificielle, elle n'en est pas moins omniprésente, et votre flair aguerri en connaît déjà sûrement quelques exemples :

- Un *groupe* est un ensemble sur lequel on s'autorise l'addition, la soustraction entre toutes paires d'éléments.
- Un *anneau* est un ensemble sur lequel on s'autorise l'addition, la soustraction et le produit d'éléments.
- Un *corps* est un ensemble sur lequel on s'autorise l'addition, la soustraction, la multiplication, et la division par tout élément non nul.
- L'ensemble $(\mathbb{R}, +, \times)$ muni de l'addition constitue un *corps* (On ne spécifie pas les opérations $-$ et $/$ car elles correspondent respectivement aux additions par l'opposé et multiplication par l'inverse).
- L'ensemble $(M, \circ)$ des rotations du plan muni de l'opération de composition des applications constitue un groupe.

Reconnaître ces structures algébriques quand vous les rencontrez est très utile, car cela permet de transposer votre intuition mathématique des situations courantes (l'addition de nombres par exemple) à des situation plus abstraites (les rotations de l'espace).

Dans ce cours, c'est la structure d'espace vectoriel qui est à l'honneur : elle permet de revêtir une grande variété d'ensembles du langage de la géométrie

1. L'algèbre (de l'arabe al-jabr, la reconstruction) est le domaine des mathématiques qui étudie les structures algébriques *i. e.*les ensembles munis d'opérations. Le mot arabe al-jabr, dont la traduction littérale est peu parlante, exprime le principe de déconstruction/reconstruction selon lequel, étant donnée une égalité, on peut effectuer de part et d'autre la même opération dans le but -par exemple- d'exprimer une inconnue en fonction de variables connues.

FIGURE 1.1: Paru entre l'an 813 et l'an 833, voici la première page du Kitab al-mukhtasar fi hisab al-jabr wa-l-muqabala.

(les droites, les plans, les volumes ...). Elle permet aussi, à moindre frais de généraliser ce langage à des cas plus abstraits (les hyperplans, le concept de dimension ...).

1.2 Construction des espaces vectoriels

Dans cette partie, nous spécifions les lois de composition qui font d'un ensemble un espace vectoriel.

Dans tout le cours $\mathbb{K}$ désigne le corps des nombres réels ou celui des nombres complexes.

$(E, +, \cdot)$ est un ensemble muni d'une addition interne et d'une multiplication externe, ces opérations sont *stables dans E* :

$$\forall (u, v) \in E^2, u + v \in E \tag{1.1}$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u \in E, \lambda \cdot u \in E \tag{1.2}$$

DÉFINITION 6 (Espace vectoriel).
$(E, +, \cdot)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ si et seulement si :

1. $(E, +)$ est un groupe commutatif (on dit aussi abélien).
2. **Compatibilité entre $\cdot$ et la multiplication sur $\mathbb{K}$.**
   $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2, \forall u \in E, \alpha(\beta u) = (\alpha\beta) \cdot u.$
3. **Distributivité de la loi $\cdot$ par rapport à l'addition sur $\mathbb{K}$.**
   $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2, \forall u \in E, (\alpha + \beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u.$
4. **Distributivité de la loi $\cdot$ par rapport à l'addition sur E.**
   $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (u, v) \in E^2, \lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$.
5. $0 \cdot u = 0_E$
6. $1 \cdot u = u$

Par la suite, on notera simplement l'espace vectoriel E sans spécifier les opérations dont l'ensemble E est muni.

Les éléments de E sont appelés des *vecteurs*, ceux de $\mathbb{K}$ des *scalaires*.

DÉFINITION 7 (Combinaison linéaire).
Sur un espace vectoriel, on appelle combinaison linéaire tout élément de la forme $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_n u_n$ où $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$, $(u_1, \ldots, u_n) \in E^n$. Par construction, E est stable par combinaison linéaire.

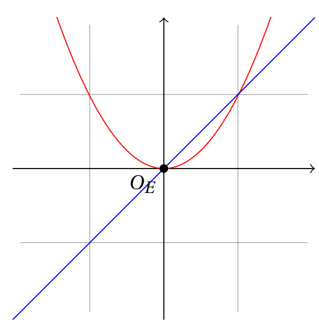

FIGURE 1.2: La parabole rouge n'est pas stable par combinaison linéaire, alors que la droite bleue l'est.

Exemples.

- La droite réelle est un espace vectoriel.
- L'ensemble des fonctions réelles continues $\mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est un espace vectoriel car la somme, et la multiplication par un scalaire de fonctions continues sont continues.

- La droite $\{(x,x)\in\mathbb{R}^2, x\in\mathbb{R}\}$ est un espace vectoriel.
- La parabole $\{(x,x^2)\in\mathbb{R}^2, x\in\mathbb{R}\}$ n'est pas un espace vectoriel car elle n'est stable ni par homothétie, ni par somme.

DÉFINITION 8 (Sous-espace vectoriel engendré par une famille). Soit une famille $(v_1,\dots,v_n)$ d'éléments d'un ensemble E muni d'une multiplication externe et d'une addition, alors

$$Vect(v_1\dots v_n) := \{k_1 v_1 + \dots + k_n v_n, (k_1,\dots,k_n)\in\mathbb{K}^n\}$$

munit E d'une structure d'espace vectoriel. On l'appelle espace vectoriel engendré par $(v_1\dots v_n)$, c'est le plus petit espace vectoriel contenant cette famille de vecteurs.

Exemples.

- La droite d'équation $x=y$ est l'espace vectoriel engendré par le vecteur $1;1$.
- Le plan $\mathbb{R}^2$ est engendré par $\{(1,0),(0,1)\}$ mais aussi par $\{(0,1),(0,0),(1,1)\}$.
- L'espace des solutions de l'équation différentielle $y''+y=0$ est engendré par $(\cos,\sin)$, mais aussi par $(\cos+\sin,\cos-\sin)$.
- Le cercle unité, vu comme famille de vecteurs du plan, engendre le plan tout entier. Notons qu'il s'agit d'une famille infinie.

1.3 *Construire des espaces vectoriels à partir d'espaces vectoriels*

On montre en théorie des ensembles comment construire des ensembles à partir d'ensembles à l'aide d'opération ensemblistes : l'intersection $\cap$, l'union $\cup$, le produit cartésien $\times$. L'objet de cette section est le suivant : à partir des opérations ensemblistes connues, nous munissons l'ensemble résultant d'opérations ¨produit¨ afin d'obtenir de nouveaux espaces vectoriels.

Il est souvent long de vérifier tous les axiomes de la définition, aussi, pour montrer qu'un ensemble forme en effet un espace vectoriel, il peut être bénéfique de montrer qu'il a été obtenu comme l'un des espaces vectoriels suivants.

DÉFINITION 9 (Sous-espace vectoriel). Soit E un espace vectoriel, on dit que $V\subset E$ est un sous-espace vectoriel de E si :

- $V\neq\emptyset$. (De façon générale, avant d'écrire "soit $x\in A$", vérifiez que A est non vide, et donc que vous parlez d'un x qui existe.)
- $\forall\lambda\in\mathbb{K}, \forall(u,v)\in V^2, \lambda u+v\in V$. On dit que V est stable par combinaison linéaire.

Exemples.

- 0_E est le plus petit sous-espace vectoriel de E car tous les sous-espaces vectoriels de E contiennent 0_E (pourquoi ?).
- Toute droite du plan passant par l'origine est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.
- Dans le plan, la droite d'équation $y = 1$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

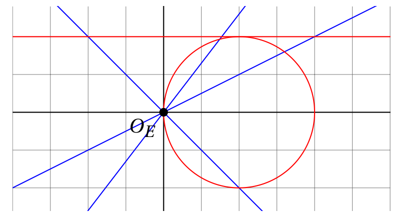

FIGURE 1.3: En bleu, des sous-espaces vectoriel de $\mathbb{R}^2$, en rouge des sous-ensembles qui ne le sont pas : pourquoi ?

Remarque.
Un sous-espace vectoriel est lui-même un espace vectoriel, en effet il est stable par combinaison linéaire, le reste des propriétés constitutives sont automatiquement héritées de E.

Propriété 1.
Si U et V sont deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E, alors $U \cap V$ est un sous-espace vectoriel de E.

Exemples.

- L'intersection de toutes les droites du plan passant par l'origine est $\{0_{\mathbb{R}^2}\}$.
- L'intersection du plan d'équation $V_1 : x + y + z = 0, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et de la droite $V_2 = Vect(1; 0; -1)$ est $V_1 \cap V_2 = V_2$.

DÉFINITION 10 (Somme, somme directe de sous-espaces).
Soient U et V deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E, alors on définit

$$U + V = \{u + v | (u, v) \in U \times V\}.$$

C'est un sous espace vectoriel de E, on l'appelle la somme de U et V.

Si de plus, $U \cap V = 0_E$, on dit que la somme de U et de V et *directe*, et on la note $U \oplus V$, on dit alors que U et V sont *supplémentaires dans E*

Exemples.

- On a $Vect(u_1, \dots, u_n) = Vect(u_1) + Vect(u_n) + \dots Vect(u_n)$.
- $Vect(1, 0)$ et $Vect(0, 1)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$.

Propriété 2.
Soit E de dimension finie, et F un sous-espace de E. Alors il existe un supplémentaire G de F dans E, tel que $E = F \oplus G$. Ce supplémentaire n'est pas unique.

Remarque.
Si la notion de supplémentaire partage des analogies avec celle de complémentaire ensembliste, elle en reste différente : l'intersection d'un sous-espace et de son supplémentaire est non vide et réduite au vecteur nul !

Exemples.

$Vect(\mathbf{u_x}, \mathbf{u_y})$ admet pour supplémentaires $Vect(0;0;1)$, mais aussi $Vect(0;1;1)$.

1.4 Dimension et coordonnées

DÉFINITION 11 (Famille libre, famille liée).
Une famille $(v_1, \ldots, v_n)$ de vecteurs d'un espace vectoriel E est dite libre si et seulement si :

$$\forall (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{K}^n, k_1 v_1 + \ldots + k_n v_n = 0 \implies k_1 = \ldots = k_n = 0$$

Une famille non libre est dite *liée*. Une famille est liée dès lors qu'il existe en une combinaison linéaire nulle.

Exemples.

- La famille $\{(0,1),(1,0)\}$ est libre.
- La famille $\{(0,1),(0,0),(1,1)\}$ est liée.
- La famille de fonctions $(\cos, \sin)$ est libre, alors que la famille $(\cos, \sin, \cos - \sin)$ est liée.

DÉFINITION 12 (Famille génératrice).
Une famille $(v_1, \ldots, v_n)$ de vecteurs d'un espace vectoriel E est dite génératrice si et seulement si :

$$\forall v \in V, \exists (k_1, \ldots, k_n) | v = k_1 v_1 + \ldots + k_n v_n$$

Autrement dit, une famille est génératrice de E dès lors que tout élément de E peut s'écrire comme combinaison linéaire de ses éléments.

Exemples.

- La famille $\{(0,1),(1,0)\}$ est génératrice de $\mathbb{R}^2$.
- La famille (cos, sin) est génératrice de l'espace des solutions de $y'' + y = 0$

DÉFINITION 13 (Base).
On appelle base de E toute famille de vecteurs qui est libre et génératrice.

DÉFINITION 14 (Dimension).
Si E admet une base composée de $d \in \mathbb{N}$ vecteurs, alors toute base de E sera composée de d vecteurs, on appelle d la *dimension de E*, notée $\dim(E)$.

Remarque.

D'une certaine manière, la dimension constitue le nombre de coordonnées qu'il faut et qu'il suffit pour décrire un élément quelconque de l'espace vectoriel.

Le concept de dimension généralise les notions de droite et plan à des espaces vectoriels plus généraux : une droite vectorielle est un espace vectoriel de dimension 1, un plan vectoriel un espace vectoriel de dimension 2, un hyperplan est un espace vectoriel de dimension $d-1$ dans un espace vectoriel de dimension d.

Exemples.

- L'espace $\mathbb{R}^2$ est un espace de dimension 2. On appelle *base canonique* la base $((1,0),(0,1)) =: (e_1, e_2)$.
- L'espace $\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est de dimension infinie : il n'existe pas de famille finie grâce à laquelle on pourrait écrire toute fonction réelle continue.

Propriété 3.

Si E est un espace vectoriel de dimension n, alors :

- *Toute famille libre de E admet au plus n vecteurs*
- *Toute famille génératrice de E a au moins n vecteurs*
- *Toute base de E admet exactement n vecteurs.*

Propriété 4.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et V un sous-espace de E, alors

- *V est de dimension finie.*
- $\dim(V) \leq dim(E)$
- $\dim(V) = \dim(E) \implies V = E$

Propriété 5.

Soit $(v_1, \ldots, v_k)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E, alors $Vect(v_1, \ldots, v_k)$ est de dimension finie au plus égale à k.

Définition 15.

Soit $(v_1, \ldots, v_k)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E, le rang de cette famille est le nombre $\dim(Vect(v_1, \ldots, v_k))$, c'est la dimension de l'espace qu'elle engendre.

Exemples.

- La famille $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right)$ engendre un plan : elle est de rang 2.

- La famille de fonction $(ch, sh, \exp)$ est de rang 2 sur $\mathbb{R}$ (car $ch + sh - \exp = 0_{C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})}$).
- La famille $(\cos, \sin, \exp)$ est de rang 3 comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel, mais de rang 2 comme $\mathbb{C}$ espace vectoriel.

Propriété 6.
Soient U et V deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E, de dimension finie, alors :

$$\dim(U+V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U \cap V)$$

Propriété 7.
Soient U un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie E, alors on peut toujours trouver un sous-espace vectoriel V de E tel que $E = U \oplus V$

DÉFINITION 16.
Soit U un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie E, un sous-espace vectoriel V de E tel que $E = U \oplus V$ s'appelle un supplémentaire de U. Il n'est pas unique !

Propriété 8.
Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}$ et $\mathscr{B} = (e_1, \dots e_n)$ unes base de E. Tout vecteur v de E se décompose de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de base de E :

$$\exists!(x_1, \dots x_n) \in \mathbb{K}^n | v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$$

DÉFINITION 17 (Coordonnées).
Les coefficients $x_1 \dots x_n$ s'appellent les coordonnées de v dans la base $\mathscr{B}$, on écrit :

$$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$$

Remarque.
Lorsqu'on se place dans $\mathbb{R}^n$, on peut écrire de façon unique le vecteur $u = (x_1, \dots, x_n)$ comme un n-uplet d'éléments de $\mathbb{R}$. Cette notion est associée à la construction purement ensembliste de $\mathbb{R}^n$ comme produit cartésien $\mathbb{R} \times \dots \mathbb{R}$, elle ne prérequiert aucune structure d'espace vectoriel, et encore moins le concept de base.

Cette structure de produit cartésien permet néanmoins de munir $\mathbb{R}^n$ d'une somme vectorielle et d'une multiplication extérieure en héritage des multiplication et additions de $\mathbb{R}$ vu comme un corps. On peut alors définir la notion de *base canonique* $\mathscr{B}_n = (e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}_n$, où e_i est le n-uplet

$(0,\dots,0,1,0,\dots 0)$, le 1 est positionné à la case i. Dès lors, on peut exprimer le vecteur $u=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, vu comme n-uplet dans la base $\mathscr{B}$:

$$u=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathscr{B}}.$$

Les deux écritures sont les mêmes, ce qui engendre souvent un amalgame de notations, on voit parfois "$\mathscr{F}=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^2$". On comprend très bien le sens à donner à cette expression, mais il s'agit d'une tautologie, qui définit la base canonique en faisant appel à une expression dans la base canonique.

On retiendra que le concept de base est généralisable à des espaces vectoriels qui ne sont pas bâtis sur le produit cartésien d'ensembles, mais qu'on ne peut pas définir pour eux de "base canonique". Cependant, ont peut toujours raisonner sur les matrices colonnes, et penser ces espaces comme $\mathbb{R}^n$.


FIGURE 1.4: Carl Friedrich Gauss. Tableau de Gottlieb Biermann (1887), d'après un portrait par Christian Albrecht Jensen (1840).

1.5 Algorithme de Gauss

1.5.1 Motivations

Nous avons introduit précédemment la notion de base d'un espace vectoriel en dimension finie, et avec elle la notion de coordonnées. Les coordonnées sont utiles à mener des calculs de façon opérationnelle, le chapitre suivant est dédié à leur étude systématique au travers du concept de matrice. Nous exposons ici la méthode du pivot de Gauss, à plusieurs égards remarquable :

- Elle fournit une façon systématique de déterminer le rang d'une famille de vecteurs à partir des coordonnées.
- Elle permet de résoudre des systèmes linéaires de façon systématique.
- Elle permet de montrer que l'on peut toujours mettre une matrice sous forme triangulaire par un changement de base approprié.

Exemples (Résolution d'un système linéaire 3x3).
Supposons que l'on veuille résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 2x-y-z=4 \\ x-y+z=-1 \\ x-2y-z=0 \end{cases}$$

Que nous schématiserons par la suite ainsi :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Nous notons les opérations sur les lignes de la façon suivante $L_i \leftarrow CL(L_j)$ pour signifier que l'on remplace la ligne i par une combinaison linéaire des lignes L_j.

Nous effectuons successivement :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & -1/2 & 3/2 & -3 \\ 0 & -3/2 & -1/2 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1/2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1/2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & -1/2 & 3/2 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & 7 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 13/5 \\ 0 & -1/2 & 0 & -9/10 \\ 0 & 0 & -5 & 7 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_3/5 \\ L_2 \leftarrow L_2 + 3/10L_3 \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 22/5 \\ 0 & -1/2 & 0 & -9/10 \\ 0 & 0 & -5 & 7 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 11/5 \\ 0 & 1 & 0 & 9/5 \\ 0 & 0 & 1 & -7/5 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1/2 \\ L_2 \leftarrow -2L_1 \\ L_3 \leftarrow -L_3/5 \end{array}$$

Nous avons donc montré que le système admettait une unique solution, et que cette dernière était $(x, y, z) = (11/5, 9/5, -7/5)$. L'algorithme de Gauss est fait pour cela : il nous donne le nombre de solutions d'un système d'équations et nous permet de les exprimer en fonction des données problème.

De façon générale, considérons une famille $(v_1, \dots v_k)$, et notons les coordonnées dans une base $\mathscr{E} = (e_1, \dots, e_n)$ de ces vecteurs de la façon suivante :

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1k} \\ v_{21} & v_{22} & \dots & v_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_{n1} & v_{n2} & \dots & v_{nk} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{array} \\ \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & \dots & v_k \end{array} & \end{array}$$

Considérons un premier cas simple, si tous les coefficients en dessous de la diagonale ii sont nuls, et que les coefficients diagonaux v_{ii} ont été disposés ainsi : les $p \leq min(k, n)$ premiers sont non nuls, les autres sont nuls :

$$
\begin{array}{cc}
\begin{pmatrix}
v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1k} \\
0 & v_{22} & \dots & v_{2k} \\
\vdots & 0 & v_{ii} & \vdots \\
0 & 0 & \dots & v_{nk}
\end{pmatrix} &
\begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{matrix} \\
\begin{matrix} v_1 & \quad v_2 & \quad \dots & \quad v_k \end{matrix} &
\end{array}
$$

Le rang de la famille est alors très simple à trouver :

- Si $n > k$ (la matrice a plus de colonnes que de lignes) on compte le nombre de termes diagonaux non nuls : si $v_{ii} \neq 0$ alors v_i n'est pas lié aux v_j pour $j < i$, les lignes $i > p$ sont nulles : la famille est de rang p.
- Si $n < k$ (la matrice a plus de lignes que de colonnes), on inverse lignes et colonnes et l'on procède de même.

1.5.2 Méthode générale

La méthode du pivot de Gauss permet de ramener un tableau de nombres quelconques à la forme précédente au moyen d'opérations sur les lignes.

1. Tout d'abord, on réordonne les lignes de façon à ce que $v_{11} \neq 0$. Cela correspond à intervertir les vecteurs e_i de $\mathscr{E}$, ce qui en fait toujours une base.

$$
\begin{array}{cc}
\begin{pmatrix}
v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1k} \\
v_{21} & v_{22} & \dots & v_{2k} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
v_{n1} & v_{n2} & \dots & v_{nk}
\end{pmatrix} &
\begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{matrix} \\
\begin{matrix} v_1 & \quad v_2 & \quad \dots & \quad v_k \end{matrix} &
\end{array}
$$

2. On choisit le coefficient $v_{11} \neq 0$ pour pivot, et on effectue l'opération $L_j \leftarrow L_j - \frac{v_{21}}{v_{11}} L_1$: la première colonne des lignes 2 à n est alors nulle.
3. On répète l'opération sur le tableau carré de taille $(k-1, n-1)$ obtenu en éliminant les premières ligne et colonne du tableau original.
4. Lorsqu'on arrive à l'itération n, on peut conclure sur le rang de la famille, (ou sur le nombre de solutions du système si l'on considère un système, puis on peut le résoudre complètement en faisant apparaître une diagonale de 1 au membre de droite.)

2
Applications linéaires

2.1 Introduction

Au coeur de l'algèbre linéaire réside le concept d'application linéaire : ces dernières envoient tout simplement un espace vectoriel sur un autre espace vectoriel. Comme bien souvent en mathématiques, l'étude des applications élève d'un cran le niveau d'abstraction des concepts, tout en apportant la saveur de leur élégance.

2.2 Présentation des application linéaires

Dans ce chapitre, E et F désignent des espaces vectoriels de dimension finie sur le corps $\mathbb{K}$.

DÉFINITION 18 (Application linéaire).
On dit qu'une application $f : E \to F$ est linéaire si et seulement si

$$\forall (u, v) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, f(\lambda u + v) = \lambda f(u) + f(v)$$

DÉFINITION 19 (Cas particuliers).

- Si $F = \mathbb{K}$, f est une *forme linéaire*.
- Si $E = F$, f est un *endomorphisme*.
- Si f est bijective, f est un *isomorphisme*.

Exemples.

- Les rotations de centre O sont des isomorphismes de $\mathbb{R}^2$.
- Les homothéties de centre O sont des endomorphismes de $\mathbb{R}^2$.
- L'application $x \in \mathbb{R} \mapsto (0, x) \in \mathbb{R}^2$ est une application linéaire injectant $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$.

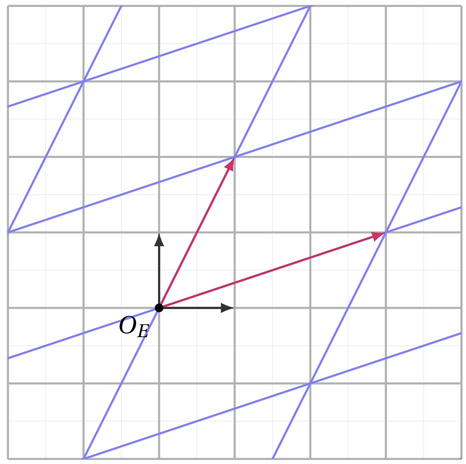

FIGURE 2.1: Cet endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ envoie les vecteurs de le base canonique de $\mathbb{R}^2$ sur les vecteurs obliques violets.

DÉFINITION 20 (Noyau).
Le noyau de f est l'ensemble

$$\ker(f) = \{u \in E | f(u) = 0\}$$

DÉFINITION 21 (Image).
L'image de f est l'ensemble

$$\mathrm{Im}(f) = \{f(u) | u \in E\}$$

Autrement dit, il s'agit de l'ensemble que décrivent les points images $f(u)$ lorsque u décrit l'espace de départ E.

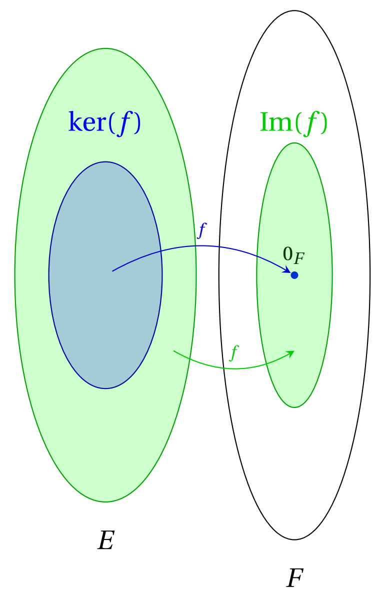

FIGURE 2.2: Noyau et image d'une application linéaire f de E dans F. Attention, ce dessin doit être compris dans un sens ensembliste et non géométrique : en effet, comme E et F sont des espaces vectoriel, s'ils contiennent une ellipse, ils contiennent tout le plan vectoriel qu'elle engendre !

Remarque.
Ce sont respectivement des sous-espaces vectoriels de E et F.

Une nouvelle façon *très élégante* de montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel est donc de montrer qu'il est le noyau ou l'image d'une application linéaire !

Exemples.

- Le plan $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y + z = 0\}$ est un espace vectoriel car il est le noyau de la forme linéaire $\phi : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto x + y + z \in \mathbb{R}$.
- La droite $\{(x, x) | x \in \mathbb{R}\}$ est l'image de $\mathbb{R}$ par la rotation de centre O, d'angle $\pi/4$, qui est une application linéaire.

DÉFINITION 22.
On définit le rang de l'application linéaire f par

$$\mathrm{rg}(f) := \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(Vect(f(e_1), \ldots f(e_p))).$$

Exemples.

- L'application linéaire définie par $x \in \mathbb{R} \mapsto 2x \in \mathbb{R}$ est de rang 1 car son image est une droite vectorielle.
- L'image d'une rotation de centre O et d'angle θ dans $\mathbb{R}^2$ est un plan : elle est de rang 2 dans $\mathbb{R}^2$, mais serait de rang 3 dans $\mathbb{R}^3$!
- L'application linéaire définie par $\sin \mapsto \cos, \cos \mapsto \cos$ a pour image une droite vectorielle : elle est de rang 1.
- L'application linéaire définie par $(1;0) \mapsto (1;0), (0;1) \mapsto (1;0)$ a pour image une droite : elle est de rang 1.
- L'application nulle a pour image $\{0_F\}$ elle est de rang 0.

Propriété 9 (Théorème du rang).
Soient E et F de dimension finie, et $f \in \mathcal{L}(E,F)$

$$\mathrm{rg}(f) + \dim(\ker(f)) = \dim(E)$$

Propriété 10.
Si f est un en endomorphisme de E : f est injective ssi $\ker(f) = \{0_E\}$ *ssi* $\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(E)$ *ssi f est bijective*

Propriété 11.
L'ensemble des applications linéaires de E dans F est un espace vectoriel, noté $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$, de dimension $\dim(E)\dim(F)$.

Autrement dit, toute combinaison linéaire d'applications linéaires est une application linéaire.

Remarque (Important!).
Si $f : E \to V$ est linéaire, et $\mathscr{E} = (e_1 \dots e_p)$ est une base de E et $\mathscr{V} = (v_1 \dots v_n)$ est une base de V, alors :

$$\forall u = \sum_{k=1}^{p} x_k e_k \in E, f(u) = \sum_{k=1}^{p} x_k f(e_k) \in F$$

$f(u)$ est donc une combinaison linéaire des $f(e_i)$.

CONCLUSION : Pour connaître l'action de f sur n'importe quel vecteur de E, il suffit de connaître l'action de f sur la base $\mathscr{E}$ *i.e.*l'ensemble $\{f(e_1), \dots, f(e_p)\}$.

Si $f(e_k) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} v_i$ et $f(u) = \sum_{k=1}^{n} y_i v_i$, alors

$$Y := \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}_{\mathscr{F}} = x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}_{\mathscr{F}} + \dots + x_p \begin{pmatrix} a_{1p} \\ \vdots \\ a_{np} \end{pmatrix}_{\mathscr{F}}$$

.

2.3 *Matrice d'une application linéaire*

DÉFINITION 23 (Matrice de $\phi \in \mathscr{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$ relativement aux bases $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$).
C'est le tableau $Mat_{\mathscr{E},\mathscr{F}}(\phi)$ (matrice) de n lignes et p colonnes formé des coordonnées des $\phi(e_k)$ dans la base $\mathscr{F}$:

$$Mat_{\mathscr{E},\mathscr{F}}(\phi) = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} & \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{matrix} \\ \begin{matrix} \phi(e_1) & \phi(e_2) & \dots & \phi(e_p) \end{matrix} & \end{array}$$

On écrit la relation 2.2 sous la forme $Y = AX$.

On note $\mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de n lignes et p colonnes. Il s'agit en fait d'un espace vectoriel de dimension np.

Remarque.
Pour se souvenir dans quel ordre on range les coefficients a_{ij} il suffit de remarquer qu'il s'agit de l'ordre du dictionnaire (dit lexicographique) pour quelqu'un qui écrit de gauche à droite.

2.4 Formes linéaires

L'espace vectoriel des formes linéaires sur E est de dimension $p = \dim(E)$. On parle d'espace dual de E, noté E^*.

La matrice $Mat_{\mathscr{E}}(\phi) \in M_{1n}\mathbb{K}$ de la forme linéaire ϕ dans la base $\mathscr{E}$ est alors :

$$Mat_{\mathscr{E}}(\phi) = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_p \end{pmatrix}_{\mathscr{E}}$$

Par ailleurs

$$\forall u = \sum_{k=1}^{p} x_k e_k \in E, \phi(u) = \sum_{k=1}^{p} \phi(e_k) x_k = \sum_{k=1}^{p} a_k x_k =: AX$$

Propriété 12.
Si E est de dimension finie d, alors son dual E^* est aussi de dimension d. Si l'on se donne une base $\mathscr{E} = (e_1, \dots, e_n)$, alors on appelle base duale *la base $\mathscr{E}^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$ de E^* définie par :*

$$\forall i \leq d, \forall j \leq d, e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$$

Où δ_{ij} est le symbole delta de Kronecker, qui vaut 1 si $i = j$, et 0 sinon. On appelle les e_i^* formes linéaires coordonnées relativement à la base $\mathscr{E}$.

Remarque.
Les formes linéaires e_i^* admettent une interprétation géométrique très naturelle comme composante de la projection sur e_i parallèlement à tous les

$e_j, j \neq i$. Sauriez-vous en faire un dessin pour une base non orthogonale dans $\mathbb{R}^2$?

La notion de base duale est une notion qui porte sur l'intégralité de la base : chaque e_i^* dépend de l'intégralité des vecteurs de $\mathscr{E}$. En particulier, changer un seul vecteur de $\mathscr{E}$ modifie tous les e_i^*, ce que l'on voit très bien en les pensant comme projections parallèles, fig. 2.4!

La notion de base duale permet d'associer une unique forme linéaire aux vecteurs de E. Elle montre ainsi l'isomorphisme entre E et son dual E^*. Il existe d'autres façons d'effectuer cette association lorsqu'on munit l'espace d'un produit scalaire, sans faire référence à l'écriture dans une base. Nous le verrons dans le chapitre dédié.

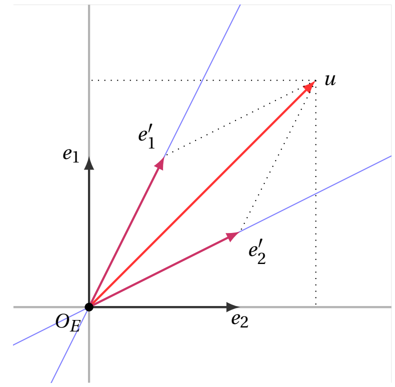

FIGURE 2.3: Les pointillés figurent les projections parallèles dans différentes bases : changer un seul vecteur change la projection parallèle de tous les vecteurs!

Exemples.

La base canonique $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^2$ admet pour base duale les formes linéaires $u_x^* = (1,0)_{\mathscr{B}}$ et $u_y^* = (0,1)_{\mathscr{B}}$ (ou bien, sans faire référence au concept de base $u_x^* : (x,y) \mapsto x$, $u_y^* : (x,y) \mapsto y$).

2.5 *Equations d'un sous-espace vectoriel*

Propriété 13 (Hyperplan vu comme noyau d'une forme linéaire).
Le noyau d'une forme linéaire définit un hyperplan : en dimension 2 c'est une droite, en dimension 3 c'est un plan, et en dimension d un espace vectoriel de dimension $d-1$.

Propriété 14.
Soit V un sous-espace vectoriel de E, de dimension $j \leq p$, alors il existe $p-j$ formes linéaires $\{\phi_1, \ldots \phi_{p-j}\}$ telles que $V = \bigcap_{m=1}^{p-j} \ker(l_m)$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{V}} \in V \iff \begin{cases} a_{11}x_1 & + & \ldots & + & a_{1p}x_p = 0 \\ & & \vdots & & \\ a_{p-j,1}x_1 & + & \ldots & + & a_{p-j,p}x_p = 0 \end{cases}$$

Ce sont "des" équations de V dans la base E.

Autrement dit, un espace vectoriel de dimension $p-j$ peut toujours être vu comme l'intersection de j hyperplans.

Exemples.

- En dimension 2, un point est l'intersection de deux droites sécantes, ces droites ne sont pas uniques.
- En dimension 3, une droite est l'intersection de deux plans sécants, ces plans ne sont pas uniques.

2.6 *Système d'équations linéaires*

Dans cette section, nous montrons que l'on peut voir un système d'équations linéaires sous forme matricielle, et donc l'interpréter un cran d'abstraction au dessus, au niveau des applications linéaires correspondantes.

> Propriété 15.
> *Soient E et F deux espaces de dimensions finies p et n, $f \in \mathscr{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$, $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ deux bases de E et F.*
>
> *En reprenant les notations de la section précédente pour les coordonnées, nous avons :*
>
> $$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & \dots & + & a_{1p}x_p = y_1 \\ & & \vdots & & \\ a_{p-j,1}x_1 & + & \dots & + & a_{p-j,p}x_p = y_n \end{cases}$$
>
> *soit matriciellement $Y = AX$ (matrices de tailles $(n,1),(n,p),(p,1)$)*

Réciproquement : Soit un système linéaire de n équations à p inconnues

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & \dots & + & a_{1p}x_p = y_1 \\ & & \vdots & & \\ a_{p-j,1}x_1 & + & \dots & + & a_{p-j,p}x_p = y_n \end{cases}$$

Posons $E = \mathbb{K}^p$ et $F = \mathbb{K}^n$, munis de leurs bases canoniques, $f \in \mathscr{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$, de matrice dans les bases canoniques :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Le système peut se reformuler ainsi : soit $v \in F$, trouver s'ils existent les vecteurs $u \in E$ tels que $f(u) = v$. On peut aussi adopter un point de vue matriciel, en raisonnant sur les coordonnées plutôt que les applications et vecteurs : soit une matrice colonne $Y \in \mathscr{M}_{n1}(\mathbb{K})$, trouver s'ils existent les $X \in \mathscr{M}_{p1}(\mathbb{K})$ tels que $AX = Y$.

> Propriété 16 (Structure de l'espace des solutions.).
>
> - *si $v \notin \mathrm{Im}(f)$, le système n'a pas de solution $S = \emptyset$ (on dit le système* incompatible*).*
> - *si $v \in \mathrm{Im}(f), \exists u_0 | f(u_0) = v$, l'ensemble des solutions $S = u_0 + \ker(f)$ (c'est une variété affine).*

3
Matrices

3.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons montré le lien entre de lourdes écritures en coordonnées et une élégante écriture matricielle. Les matrices sont des objets aux multiples visages : elles permettent aussi bien de représenter des vecteurs que des applications linéaires, mais aussi des produits scalaires.

Ce chapitre se propose de doter l'ensemble des matrices de lois de composition : sa structure d'espace vectoriel émergera alors, puis nous aborderons le concept -crucial en physique- de changement de coordonnées. En effet, si une matrice représente indifféremment les coordonnées de divers objets abstraits dans une base d'un espace vectoriel, ces coordonnées se transforment différemment pour chacun de ces objets.

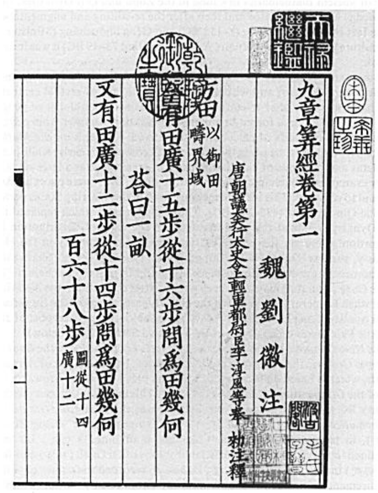
九章算經卷第一
魏 劉徽 注
唐朝議大夫行太史令上輕車都尉臣李淳風等奉勑注釋
方田 以御田疇界域
今有田廣十五步從十六步問爲田幾何
荅曰一畝
又有田廣十二步從十四步問爲田幾何
百六十八步 圖從十四廣十二

FIGURE 3.1: Les Neuf Chapitres sur l'Art Mathématique, est un livre anonyme compilé entre le II^e et le I^{er} siècle avant JC. On y trouve la première trace écrite de l'usage de tableaux de nombres pour résoudre des systèmes d'équations.

3.2 Espace des matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$

DÉFINITION 24 (matrice à coefficients dans $\mathbb{K}$).
Une matrice de n lignes et p colonnes est un tableau de n lignes et p colonnes contant des scalaires (*i. e.*des éléments de $\mathbb{K}$).

Remarque.
Cette définition pourrait paraître redondante avec la définition de matrice d'un endomorphisme ; que nenni ! Nous définissons ici le concept abstrait de matrice. Une matrice en tant que telle n'est qu'un tableau de nombres, nous ne faisons pas référence ici à la moindre base d'un quelconque espace vectoriel sous-jacent (on remarque d'ailleurs l'absence de la mention de la base en indice de la matrice, jusqu'alors toujours présente). On ne requiert pas non plus à ce stade que la matrice représente une application linéaire.

On désigne en général une matrice avec une lettre majuscule. On écrit

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & a_{ij} & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$$

Soit en abrégé $A = \left(a_{ij}\right)$. On appelle a_{ij} le terme général de la matrice A.

DÉFINITION 25 (Addition, multiplication par un scalaire).
L'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$. On définit l'addition de deux éléments P et Q de cet ensemble par :

$$P + Q = \left(p_{ij} + q_{ij}\right)$$

De même, on définit la multiplication par un scalaire par :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda \cdot P = (\lambda p_{ij})$$

Propriété 17.
Muni de ces deux opérations, $(\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ *est un espace vectoriel de dimension* np.

Remarque.

- Si $n = p$, on parle de matrices carrées, et on note simplement $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- Si $n = p$, on définit les matrices diagonales, triangulaires supérieures, triangulaires inférieures D, U, et L[1] de la forme :

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_i & 0 \\ 0 & 0 & d_n \end{pmatrix} U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{1i} & u_{1n} \\ 0 & u_{ii} & u_{in} \\ 0 & 0 & u_{nn} \end{pmatrix} L = \begin{pmatrix} l_1 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{ii} & 0 \\ l_{n1} & l_{ni} & l_{nn} \end{pmatrix}$$

- La matrice $I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (parfois notée $\mathbb{1}_n$) constituée de 1 sur la diagonale et de zéros partout ailleurs s'appelle la matrice identité : c'est la matrice de l'endomorphisme identité dans n'importe quelle base.

1. On rencontre souvent cette nomenclature anglosaxonne, associée aux mots diagonal, lower et upper.

DÉFINITION 26.
Si $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$, on appelle transposée de A la matrice $A^\top$ obtenue en transformant les colonnes de A en lignes : son terme général est donc $A^\top = \left(a_{ji}\right)$ si celui de A est $A = \left(a_{ij}\right)$.

Remarque.
On remarque la notation puissance de la transposée, il s'agit de la convention officielle, on rencontre cependant parfois la convention opposée ${}^tA$ ... Nous n'utiliserons pas cette dernière.

DÉFINITION 27 (Matrice symétrique).
On appelle matrice symétrique une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A = A^\top$.

3.3 *Produit de matrices, inverse*

Posons $E = \mathbb{K}^p$ et $F = \mathbb{K}^n$, toute matrice $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ peut s'interpréter comme matrice de l'application linéaire de matrice A dans les bases canoniques de E et F, $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}) \mapsto f_A \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$.

Propriété 18.
Soient $(A, B) \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})^2$, f_A et f_B les applications linéaires associées, alors $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda A + B \mapsto \lambda f_A + f_B$.

DÉFINITION 28.
Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$, on définit leur produit $P = AB \in \mathcal{M}_{mp}(\mathbb{K})^2$ où :

$$\forall i \leq m, \forall j \leq p, p_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

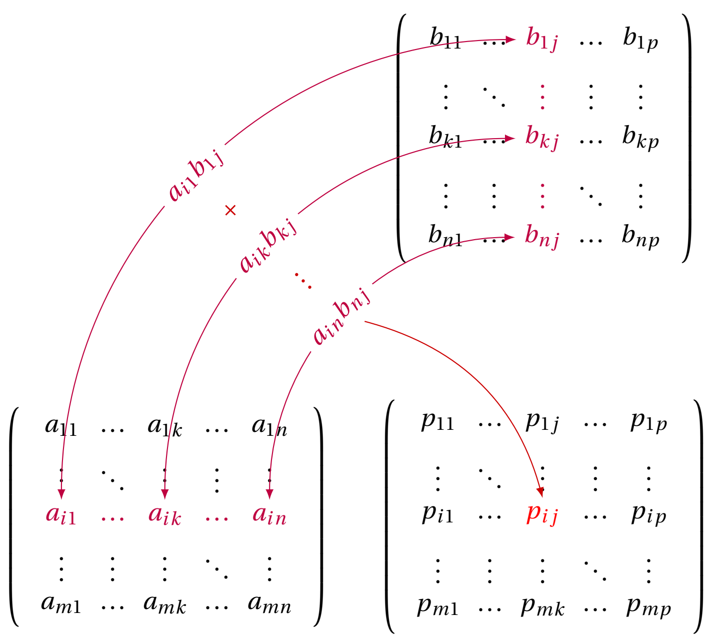

FIGURE 3.2: Interprétation graphique du produit de matrices A possède m lignes et n colonnes, B n colonnes et p lignes. Il en résulte que $P = AB$ a m lignes et p colonnes.

Propriété 19.
Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$, alors $AB \mapsto f_A \circ f_B$. Cela n'est pas étonnant, car notre guide pour la définition du produit de matrice était qu'il corresponde à la composition des application linéaires correspondantes.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K}^p \arrow[r, "f_B"] \arrow[rr, bend right, "f_A \circ f_B"'] & \mathbb{K}^n \arrow[r, "f_A"] & \mathbb{K}^m \end{tikzcd}$$

FIGURE 3.3: Produit matriciel du point de vue des applications.

DÉFINITION 29 (Matrice inversible).
On dit que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible s'il existe $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, tel que $AP = PA = I_n$, *i.e.*si A admet le même inverse à droite et à gauche. Cet inverse est alors unique et on le note $P = A^{-1}$.

L'ensemble des matrices carrées inversibles dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ forme le groupe linéaire d'ordre n. On le note $GL_n(\mathbb{K})$.

Propriété 20.

$$A^{-1} \mapsto f_A^{-1}$$

Propriété 21.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors A est inversible

1. *ssi f_A est un isomorphisme*
2. *ssi f_A est surjective*
3. *ssi* $\mathrm{rg}(f_A) = \mathrm{rg}(A) = n$

Propriété 22.
Dès lors que le produit AB est défini, on a $(AB)^\top = B^\top A^\top$.

Propriété 23.
Si A et B sont inversibles dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, AB l'est aussi, et

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

3.4 *Changement de coordonnées*

Soit E un espace vectoriel de dimension p, $\mathcal{E} = (e_1 \dots e_p)$ une base de E, et $\mathcal{E}' = (e'_1, \dots, e'_p)$ une deuxième base de E.

$$u = x_1 e_1 + \dots + x_p e_p = x'_1 e'_1 + \dots + x'_p e'_p$$

DÉFINITION 30.
On appelle matrice de passage de la base $\mathscr{E}$ dans la base $\mathscr{E}'$ la matrice carrée P des coordonnées des vecteurs de $\mathscr{E}'$ dans la base $\mathscr{E}$:

$$P = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} e'_{11} & e'_{12} & \dots & e'_{1k} \\ e'_{21} & e'_{22} & \dots & e'_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ e'_{n1} & e'_{n2} & \dots & e'_{nk} \end{pmatrix} & \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{matrix} \\ \begin{matrix} e'_1 & \quad e'_2 & \quad \dots & \quad e'_k \end{matrix} & \end{array}$$

C'est la matrice dans la base $\mathscr{E}$ de l'unique application linéaire qui aux vecteurs de la base $\mathscr{E}$ associe ceux de la base $\mathscr{E}'$. Puisqu'elle envoie une base dans une base, elle est de rang maximal dans E et est donc inversible.

Propriété 24.

Cette matrice permet d'exprimer u dans la base $\mathscr{E}'$ en fonction de ses coordonnées dans la base $\mathscr{E}$:

$$X' = P^{-1}X$$

Ici, on voit bien qu'un vecteur de E ne se réduit pas à la matrice de ses coordonnées dans une base : en effet ces dernières doivent se transformer de façon contravariante. *En effet, pour que le même vecteur de E soit représenté dans les deux bases, la transformation des coordonnées doit être exactement l'inverse de la transformation des vecteurs de base.*

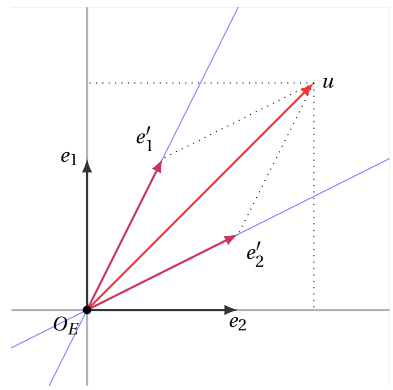

FIGURE 3.4: Le changement des coordonnées du vecteur $u \in \mathbb{R}^2$ doit être exactement l'inverse de la transformation qui envoie la base $\mathscr{E}$ dans la base $\mathscr{E}'$. Aussi l'appelle-t-on *contravariant.*

Remarque.

Au contraire, la matrice ligne d'une forme linéaire $X \in \mathscr{M}_{1n}(\mathbb{K})$ se transforme de façon covariante : $X' = XP$.

Propriété 25.

Soit $f \in \mathscr{L}_{\mathbb{K}}(E)$. On note A la matrice de f dans la base $\mathscr{E}$, et A' sa matrice dans $\mathscr{E}'$. On désigne par P la matrice de passage de la base $\mathscr{E}$ dans la base $\mathscr{E}'$.

Soit $u \in E$, on note $(X, Y) \in \mathscr{M}_{n1}(\mathbb{K})^2$ les coordonnées de u et $f(u)$ dans $\mathscr{E}$. On note $(X', Y') \in \mathscr{M}_{n1}(\mathbb{K})^2$ les coordonnées de u et $f(u)$ dans $\mathscr{E}'$.

On a $X' = P^{-1}X$, $Y' = P^{-1}Y$, $Y = AX$, $Y' = A'X'$, donc

$$A' = P^{-1}AP$$

On dit que la matrice d'une application linéaire se transforme de façon une fois covariante, une fois contravariante..

4 Déterminants

4.1 Introduction

Ce chapitre apporte un nouvel outil : le déterminant. Cet outil permet de généraliser la notion de volume (orienté) aux espaces vectoriels de dimension p. Il permet de montrer de façon très élégante qu'une famille de vecteurs est liée. Le point de vue adopté est le suivant : une famille n'est libre que si elle définit un p-volume non nul.

Cet outil se généralise sans mal aux applications linéaires, et pour cause : une application linéaire dilate ou contracte tous les volumes de l'espace vectoriel de départ d'un même facteur, on appelle ce facteur déterminant de l'application linéaire. On obtient alors un critère simple pour savoir si une application linéaire est inversible : son déterminant ne doit pas s'annuler.

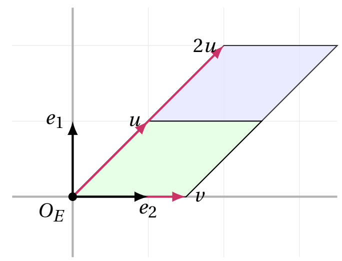

FIGURE 4.1: En doublant le côté u du parallélogramme défini par u et v, nous avons doublé son volume.

4.2 Formes linéaires alternées, déterminant

Dans cette section, nous aimerions définir une application qui à $p \in \mathbb{N}$ vecteurs associe le p-volume orienté du parallélotope[1] qu'ils définissent. Pour cela, quelques critères vont nous guider :

1. Si la famille est liée, elle définit un parallélotope dégénéré car aplati, et le p-volume de ce dernier est nul.
2. Si l'on multiplie n'importe lequel des vecteurs par un scalaire $\lambda \neq 0$, le p-volume est multiplié par λ.
3. Si l'on ajoute un vecteur v au vecteur u_i un simple processus de découpage montre que le nouveau p-volume est la somme du p-volume de la famille (u_i) et de celui de la même famille où u est remplacé par v.

1. simple généralisation en dimension p de la notion de parallélogramme.

Soit E un espace vectoriel de dimension p sur $\mathbb{K}$, et $\mathscr{E} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E.

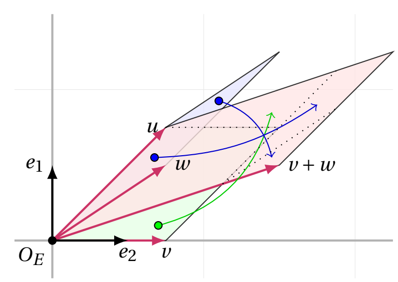

FIGURE 4.2: L'aire du parallélogramme défini par u et $v + w$ est la somme de l'aire du parallélogramme défini par u et v et de celle du parallélogramme définit par u et w. Pour vous en convaincre, vous pouvez par exemple découper puis recoller ces notes de cours comme vous l'indiquent les flèches. De préférence après l'examen.

DÉFINITION 31 (Forme p-linéaire alternée).
On appelle forme p-linéaire alternée sur E toute application $f : E^p \to \mathbb{K}$ telle que :

1. $f(u_1,\dots,u_p)$ est linéaire en chacun des u_i :

$$\forall\lambda\in\mathbb{K},\forall(u_1,\dots,u_p)\in E^p,\forall v\in E,$$
$$f(u_1,\dots,u_i+\lambda v,\dots,u_n)=f(u_1,\dots,u_i,\dots,u_n)+\lambda f(u_1,\dots,u_i,\dots,u_n)$$

2. f est alternée *i.e.*

$$\forall\lambda\in\mathbb{K},\forall(u_1,\dots,u_p)\in E^p, f(u_1,\dots,u_j,\dots,u_i,\dots,u_n)=-f(u_1,\dots,u_i,\dots,u_j,\dots,u_n)$$

Remarque.

La p-linéarité formalise les idées que nous avons motivées graphiquemenent dans les figures 4.1 et 4.2. Les formes p-linéaires alternées sont donc de bonnes candidates pour généraliser la notion de p-volume à l'espace de dimension p, nous allons montrer qu'à un facteur près (l'unité de p-volume), ce sont les seuls.

Propriété 26.

Si une famille de vecteurs $(u_1,\dots,u_i,\dots,u_p)\in E^p$ est liée, alors

$$f(u_1,\dots,u_i,\dots,u_n)=0$$

, en particulier s'il existe des entiers i et j distincts tels que $u_i=u_j$, alors $f(u_1,\dots,u_i,\dots,u_n)=0$.

Cette propriété formalise l'idée selon laquelle une famille liée définit un parallélotope dégénéré, de p-volume nul.

Propriété 27.

Toute forme p-linéaire alternée f est entièrement déterminée par la donnée du nombre $f(e_1,\dots,e_p)$.

Les formes p-linéaires alternées dans $\mathbb{K}^p$ sont donc toutes proportionnelles : elles forment un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 1.

Autrement dit, pour connaître le p-volume de n'importe quel parallélotope de l'espace, il suffit de connaître l'étalon de p-volume que constitue le parallélotope $(e_1,\dots,e_p)$.

Exemples.

$p=2$, $\mathscr{E}=(e_1,e_2)$, soient u_1 et u_2 deux vecteurs de matrices U_1 et U_2 dans $\mathscr{E}$. Alors :

$$\begin{aligned}
f(u_1,u_2) &= f(u_{11}e_1+u_{12}e_2,u_{21}e_1+u_{22}e_2)\\
&= u_{11}u_{21}f(e_1,e_1)+u_{11}u_{22}f(e_1,e_2)\\
&\quad +u_{12}u_{21}f(e_2,e_1)+u_{12}u_{22}f(e_2,e_2)\\
&= \underbrace{(u_{11}u_{22}-u_{12}u_{21})}_{\text{Indépendant de} f}\qquad\underbrace{f(e_1,e_2)}_{\text{Définit entièrement } f\text{, c'est l'étalon de surface.}}
\end{aligned}$$

Dans le cas général de la dimension p, il existe de façon remarquable une expression explicite des formes p-linéaires alternées en fonction des coordonnées u_{in} des p vecteurs $u_1, \dots, u_p$:

$$f(u_1, \dots, u_p) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} \epsilon(\sigma) u_{1\sigma(1)} \dots u_{p\sigma(p)} f(e_1, \dots, e_p)$$

où $\mathfrak{S}_p$ est l'ensemble des permutations à p éléments, et $\epsilon(\sigma)$ désigne la signature d'une permutation σ *i.e.* $\epsilon(\sigma) = (-1)^s$ où s est le nombre de permutations à deux éléments [2] qui composent σ.

2. appelées transpositions

DÉFINITION 32.
On appelle déterminant dans la base $\mathscr{E}$ et l'on note $\det_{\mathscr{E}}$ la forme p-linéaire alternée telle que $\det_{\mathscr{E}}(e_1, \dots, e_p) = 1$.

Autrement dit, le déterminant est le p-volume correspondant au choix très naturel d'associer un p-volume 1 au parallélotope de base $(e_1, \dots, e_p)$: attention, cette convention dépend de la base !

Propriété 28.
$(u_1, \dots, u_p)$ est une famille liée ssi $\det_{\mathscr{E}}(u_1, \dots, u_p) = 0$

Remarque.
Cette propriété apporte en regard très élégant sur la dépendance linéaire. Elle formalise l'idée suivante, que l'on ne savait définir qu'à l'aide du rang auparavant : une famille est liée dès lors qu'elle définit un parallélotope aplati.

DÉFINITION 33 (Déterminant d'un endomorphisme).
Soit $f \in \mathscr{L}_{\mathbb{K}}(E)$, et ϕ une forme p-linéaire alternée sur E, alors

$$\exists! d \in \mathbb{K}, \forall (u_1, \dots, u_p) \in E, \phi(f(u_1), \dots, f(u_p)) = d\phi(u_1, \dots, u_p)$$

Ce facteur d ne dépend pas de ϕ, on l'appelle déterminant de f, et on le note $\det(f)$. Ceci est exposé plus visuellement dans la figure 4.3 .

DÉFINITION 34 (Déterminant d'une matrice).
On appelle déterminant d'une matrice carrée M de dimension p le déterminant de l'application linéaire correspondante.

C'est aussi le déterminant dans la base canonique de $\mathbb{K}^p$ des vecteurs $c_1, \dots, c_p$ dont les coordonnées dans cette base sont les colonnes de M.

On a la formule générale suivante : si $M = (m_{ij})$,

$$\det(M) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} \epsilon(\sigma) m_{1\sigma(1)} \dots m_{p\sigma(p)}$$

Où la somme s'effectue sur l'ensemble des permutations à n éléments.

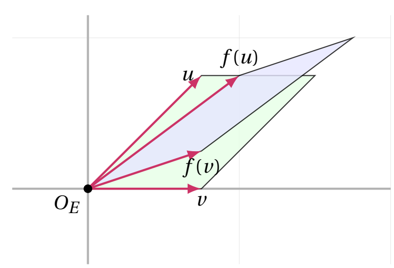

FIGURE 4.3: f dilate tous les p-volumes de E d'un facteur intrinsèque. On appelle $\det(f)$ ce facteur. La surface bleue est égale à $\det(f)$ fois la surface verte. On ne fait référence à aucune base ici.

4.3 *Propriétés du déterminant*

Dans toute la suite M est une matrice carrée de dimension p.

4.3.1 Propriétés liées à la définition par les formes p-linéaires alternées

Propriété 29.
Soit c_i la colonne numéro i de M. Si on lui ajoute une combinaison linéaire des autres colonnes de M :

$$c_i \leftarrow c_i + \sum_{j=1, j\neq i}^{p} \lambda_j c_j,$$

le déterminant obtenu est inchangé.

En effet, on a simplement rajouté un parallélotope aplati au pavé initial.

Propriété 30.
Si l'on multiplie une colonne de la matrice par un scalaire λ, le déterminant est multiplié par λ. Cela découle de la multilinéarité du déterminant.

Propriété 31.
Si on échange deux colonnes, le déterminant change de signe. En effet, cela change l'orientation du parallélotope.

4.3.2 Propriétés transposées

Propriété 32.
$\det(M) = \det(M^\top)$

Propriété 33.
Soit l_i la ligne numéro i de M. Si on lui ajoute une combinaison linéaire des autres lignes de M :

$$l_i \leftarrow l_i + \sum_{j=1, j\neq i}^{p} \lambda_j l_j$$

, le déterminant obtenu est inchangé.

Propriété 34.
Si l'on multiplie une ligne de la matrice par un scalaire λ, le déterminant est multiplié par λ.

Propriété 35.
Si on échange deux lignes, le déterminant change de signe.

4.3.3 Produit et inverse

Propriété 36.
$\det(AB) = \det(A)\det(B)$

Remarque.

Il ne faut pas confondre la dernière propriété avec la proposition suivante :

$$\det(A+B) = \det(A) + \det(B).$$

Cette dernière est absolument fausse, ce dont vous vous convaincrez aisément sur le cas particulier suivant :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

.

Propriété 37.

$\det(M) \neq 0 \iff M \in GL(E) \iff$ *Les colonnes de M forment une famille libre.*

Propriété 38.

Si $M \in GL(E), \det(M^{-1}) = \frac{1}{\det(M)}$

Propriété 39.

Si M *est la matrice d'un endomorphisme dans une base donnée, et* $N = P^{-1}MP$ *est la matrice de cet endormorphisme dans une autre base, alors* $\det(N) = \det(M)$

Le déterminant de la matrice d'un endomorphisme ne dépend donc pas de la base dans laquelle on le calcule, c'est un invariant qui ne dépend que de l'endomorphisme lui-même. Cela découle de la définition intrinsèque que nous avons donnée.

4.4 Techniques de calcul

Propriété 40.

Si M *admet une colonne ou une ligne de zéros,* $\det(M) = 0$

Propriété 41.

Si M *est triangulaire, le déterminant de* M *est égal au produit des termes diagonaux.*

En effet, on peut alors modifier chaque colonne par une combinaison linéaire des précédentes pour donner à f *une forme diagonale.*

Propriété 42 (Développement par rapport à la colonne j).

On peut calculer $\det(M)$ *récursivement (développement sur une ligne ou une colonne) :*

$$\begin{vmatrix} m_{11} & \dots & m_{1j} & \dots & m_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{i1} & \vdots & m_{ij} & \vdots & m_{ip} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{p1} & \dots & m_{pj} & \dots & m_{pp} \end{vmatrix}$$

On a (développement par rapport à la colonne j) :

$$\det(M) = \sum_{i=1}^{p} m_{ij}(-1)^{i+j}\det(A_{ij})$$

Où A_{ij} est la matrice $(p-1)\times(p-1)$ obtenue par suppression de la colonne j et de la ligne i dans M.

La quantité $(-1)^{i+j}\det(A_{ij})$ s'appelle le mineur signé (i,j) d'ordre $p-1$ de M.

4.5 Applications

4.5.1 Calcul de matrice inverse

DÉFINITION 35 (Comatrice).
Soit $M = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.

On note $c_{ij} = (-1)^{i+j}\det(A_{ij})$ le mineur signé (i,j) d'ordre $p-1$ de M.

On appelle comatrice de M et l'on note $\mathrm{Com}(M)$, la matrice de terme général c_{ij}.

Propriété 43.
Si $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, alors

$$\det(M)\, I_p = M\,\mathrm{Com}^\top(M)$$

4.5.2 Résolution de systèmes linéaires

Soit le système linéaire de p équations à p inconnues :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & +\dots & +a_{1p}x_p & = b_1 \\ \dots & & & \\ a_{p1}x_1 & +\dots & +a_{pp}x_p & = b_p \end{cases}$$

DÉFINITION 36 (Système de Cramer).
On dit que le système est de *Cramer* si $\det(A) \neq 0$, où $A = (a_{ij})$. La

FIGURE 4.4: Gabriel Cramer (1704-1752) était un mathématicien Suisse. Il est connu pour son ouvrage Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques, paru à Genève en 1750. On y trouve la règle éponyme.

valeur de l'unique solution du système s'obtient alors par $(x_1, \dots, x_p)$:

$$\forall i \in \mathbb{N}_p, x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & b_1 & \dots & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \vdots & b_i & \vdots & a_{ip} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & \dots & b_p & \dots & a_{pp} \end{vmatrix}}{\det(A)}$$

4.6 *Valeurs propres, vecteurs propres.*

DÉFINITION 37 (Valeur propre).
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de A si et seulement si le système $AX = \lambda X$ admet une solution X non nulle. Autrement dit si $\ker A - \lambda I_n \neq 0$

Propriété 44.
$\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de A si et seulement si :

$$\chi_A(\lambda) := \det(A - \lambda I_n) = 0$$

On appelle χ_A polynôme caractéristique de la matrice A. Il est de degré n.

DÉFINITION 38 (Valeurs propres et polynôme caractéristique d'un endomorphisme).
Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n, $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de f s'il existe un vecteur $u \in E^*$ tel que $f(u) = \lambda u$. Un tel vecteur u s'appelle vecteur propre.

Soit A la matrice de f dans une base de E, le polynôme caractéristique de f $\chi_f(\lambda) := \det(A - \lambda I_n)$. Il ne dépend que de f et est indépendant de la bas choisie pour écrire A.

DÉFINITION 39 (Diagonalisabilité).
Un endomorphisme f d'un espace vectoriel E de dimension n (respectivement une matrice carrée A de taille n) est dit diagonalisable si on peut trouver une base de E (respectivement de $\mathbb{K}^n$) formée de vecteurs propres de f (respectivement de A).

La matrice de f (respectivement de A). La matrice de f dans cette base s'écrit $D = \text{diag}(\lambda_, \dots, \lambda_n)$. Si l'on note P la matrice de passage de la base de départ dans la pase diagonalisante, on a $D = P^{-1}AP$

DÉFINITION 40.
On appelle sous-espace propre associé à la valeur propre λ le sous-espace vectoriel $N_\lambda = \ker(f - \lambda I)$.

Un sous-espace propre, ce n'est donc rien d'autre qu'un sous-espace vectoriel dans lequel f est une homothétie de rapport λ.

Une définition équivalente de la diagonalisabilité est donc :

DÉFINITION 41 (Diagonalisabilité 2).
Soit $f(E)$ où E est de dimension finie n, qui possède k valeurs propres distinctes. Alors les N_i sont en somme directe et f est diagonalisable ssi :

$$E = \oplus_{i=1}^{k} N_i$$

Propriété 45.
Soit λ une valeur propre de f, et α sa multiplicité, i.e.sa multiplicité en tant que racine de χ_f. On a $\dim(N(\lambda)) \leq \alpha$ *et f est diagonalisable ssi le polynôme caractéristique admet toutes ses racines dans* $\mathbb{K}$.

Remarque.
Lorsque le corps de base est $\mathbb{R}$, il peut arriver que le polynôme caractéristique ne soit pas entièrement factorisable dans $\mathbb{R}$:

$$\chi_f(\lambda) = \prod_{i=1}^{k} (\lambda - \lambda_i)^{\alpha_i} \prod_{j=1}^{l} (\lambda^2 + 2a_j\lambda + a_j^2 + b_j^2)^{\beta_j}$$

On peut encore définir les sous-espaces propres N_λ associés à λ et les sous-espaces $\tilde{N}_j = \ker A^2 + 2a_j A + (a_j^2 + b_j^2) I_n$. On montre sans mal que :

Propriété 46 (Stabilité des sous-espaces propres).
Les sous-espaces $\tilde{N}_j$ sont stables pour A, et de dimension paire $2k \leq 2\beta_j$*. On peut trouver une base de $\tilde{N}_j$ dans laquelle la matrice de A restreinte à $\tilde{N}_j$ s'écrit :*

$$\begin{pmatrix} 0 & -(a_j^2 + b_j^2) & \dots & 0 \\ 1 & -2a_j & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(a_j^2 + b_j^2) \\ 0 & 0 & 1 & -2a_j \end{pmatrix}$$

5

Forme diagonale, Forme de Jordan

5.1 Introduction

L'objet de cette partie est de donner un critère nécessaire de diagonalisabilité pour une matrice. Pour cela, nous donnons une nouvelle interprétation d'une matrice à coefficients dans $\mathbb{K}$ en tant que produit scalaire. Cette matrice n'est cependant pas unique si on ne la contraint pas à être symétrique. Nous constatons que les matrices de produit scalaire sur un espace vectoriel E se transforment comme les endomorphismes de E lors de changements de bases orthonormées. Or, il est facile d'orthogonaliser une base pour un produit scalaire, ce qui donne une méthode systématique pour diagonaliser les endomorphismes correspondants.

5.2 Produit scalaire

DÉFINITION 42 (Produit scalaire).

On appelle produit scalaire et on note $(.|.)$ une forme bilinéaire, symétrique définie, positive :

1. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (u, v, w) \in E^3, (u + \lambda w|v) = (u|v) + \lambda(w|v)$.

   En pratique, on remarquera que la linéarité par rapport à la première variable assure la linéarité par rapport à la seconde grâce à la propriété de symétrie.
2. $\forall (u|v) \in E^2, (u|v) = (v|u)$
3. $\forall (u|u) = 0 \implies u = 0$
4. $\forall (u|u) \geq 0$

Exemples.

- Le produit scalaire Euclidien dans $\mathbb{R}^2$, $\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = x_1 x_2 + y_1 y_2$ est un produit scalaire.

- L'application $\phi : (f,g) \in \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R}) \mapsto \int_a^b f(x)g(x)dx$ est un produit scalaire.

Définition 43 (Endomorphisme adjoint).
Soit $f \in \mathscr{L}_{\mathbb{K}}(E)$, alors il existe un unique endomorphisme $f^\dagger$ dit adjoint de f relativement au produit scalaire $(.|.)$ tel que

$$\forall (u,v) \in E, (f(u)|v) = (u|f^\dagger(v))$$

La matrice de l'adjoint est la matrice transposée à celle de f, sur une base orthonormée!

5.3 *Interprétation matricielle*

Définition 44 (Matrice d'un produit scalaire).
Si E est de dimension finie n, et que $\mathscr{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, on appelle matrice d'un produit scalaire dans la base $\mathscr{E}$ la matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dont le terme général est donné par :

$$A = ((e_i|e_j))$$

Par constructionn A est une matrice symétrique.

Exemples.

- La matrice du produit scalaire euclidien dans une base orthonormée est la matrice I_n.

Propriété 47.
Si $(u,v) \in E^2$ ont pour matrices $(X,Y) \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ On peut décrire leur produit scalaire de façon matricielle :

$$(u|v) = X^\top AY$$

Cela provient directement de la définition.

Exemples.
Le produit scalaire euclidien dans $\mathbb{R}^n$ s'écrit $X^\top Y$

Nous avions vu la notion de transformation une fois covariante et une fois contravariante pour des matrices d'applications linéaires sur E : cette loi de tranformation soulignait qu'un endomorphisme de E est un objet plus abstrait que sa matrice dans une base. Nous procédons ici de même, et répondons à la question : comment se transforment les matrices de produits scalaires?

Propriété 48 (Transformation d'une matrice de produit scalaire).
Soit $\phi \in \mathscr{B}_{\mathbb{K}}(E, E)$. On note A la matrice de ϕ dans la base $\mathscr{E}$, et A' sa matrice dans $\mathscr{E}'$. On désigne par P la matrice de passage dans la base $\mathscr{E}$ dans la base $\mathscr{E}'$.

Soit $(u, v) \in E$, on note $(X, Y) \in \mathscr{M}_{n1}(\mathbb{K})^2$ les coordonnées de u et v dans $\mathscr{E}$. On note $(X', Y') \in \mathscr{M}_{n1}(\mathbb{K})^2$ les coordonnées de u et v dans $\mathscr{E}'$.

On a $\phi(u, v) = X^\top AY = X'^\top A'Y'$, par ailleurs $X = PX'$, $Y = PY'$, $Y = AX$, $Y' = A'X'$, donc

$$(PX')^\top A(PY') = X'^\top A'Y'$$

Ce résultat étant vrai quel que soient X' et Y', on a :

$$A' = P^\top AP$$

On dit qu'une matrice de produit scalaire se transforme de façon congruente.

DÉFINITION 45 (Base orthonormée).
Soit $\mathscr{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Alors on dit qu'elle est orthonormée relativement au produit scalaire $(.|.)$ ssi :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}_n, (e_i, e_j) = \delta_{ij}$$

Où δ_{ij} est le symbole delta de Kronecker, qui vaut 0 si $i \neq j$, et 1 si $i = j$.

Propriété 49.
Soit $\phi \in \mathscr{B}_{\mathbb{K}}(E, E)$, si la base $\mathscr{E}$ est orthonormée relativement à ϕ, alors la matrice représentative de ϕ dans la base $\mathscr{E}$ est I_n

Propriété 50 (Orthonormalisation de Gram-Schmidt).
Etant donnée une base $\mathscr{E}$, on peut toujours trouver une base orthogonale $\mathscr{E}'$ de E selon le processus d'orthogonalisation de Gram-Schmidt :

1. *Effectuez la transformation $e_1 \mapsto e'_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}$*
2. *Effectuez la transformation $e_2 \mapsto e''_2 = e_2 - (e'_1|e_2)e'_1 \mapsto e'_2 = \frac{e''_2}{\|e''_2\|}$*
3. *…*
4. *Effectuez la transformation $e_i \mapsto e''_i = e_i - \sum_{1<j<i}(e'_j|e_i)e'_j \mapsto e'_i = \frac{e''_i}{\|e''_i\|}$*
5. *A la n-ième itération, c'est fini, vous avez une base orthonormée ! En effet, le processus préserve la liberté de la famille à chaque étape, et normalise les produits scalaires à chaque étape.*

On se contente parfois d'une orthogonalisation sans normaliser les vecteurs de base.

5.4 Lien avec la diagonalisation des endomorphismes

DÉFINITION 46 (Transformation orthogonale).
On appelle transformation $(.|.)$-orthogonale, ou isométrie de E, toute application linéaire $f \in \mathscr{L}_{\mathbb{K}}(E)$ qui conserve les produits scalaires :

$$\forall (u, v) \in \mathscr{E}^2, (u|v) = (f(u)|f(v))$$

Les isométries de E pour le produit scalaire euclidien forment le groupe orthogonal $O(E)$. On remarque que cette propriété est équivalente à la conservation de longueurs !

DÉFINITION 47.
On dit que $O \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice orthogonale, et l'on note $O \in O_n(\mathbb{K})$ une matrice d'isométrie.

Propriété 51.
Puisque

$$\forall (X, Y) \in \mathscr{M}_{n1}(\mathbb{K})^2, X^\top Y = (OX)^\top (OY)$$

On a $OO^\top = I_n$*, or en dimension finie, les endomorphismes inversibles à droite dont inversibles à gauche, donc* $O^{-1} = O^\top$.

Propriété 52.
Une matrice est orthogonale si et seulement si

1. *Ses colonnes ou ses lignes forment une base orthonormée.*
2. *Elle envoie une base orthonormée sur une base orthonormée.*
3. *Elle envoie toute base orthonormée sur une base orthonormée.*

C'est ici que se trouve tout le sel de ce chapitre : les matrices d'applications linéaires se transforment selon $A' = P^{-1}AP$, les matrices de produit scalaire selon $A' = P^\top AP$ dans un changement de base quelconque. Néanmoins, un petit miracle mathématique survient si ce changement de base est orthonormal : $P^\top = P^{-1}$; les matrices de produit scalaires et les matrices d'applications linéaires se transforment de la même façon !

Le problème de trouver une base diagonalisante pour une matrice A revient donc au problème beaucoup plus simple d'orthogonaliser la base pour le A-produit scalaire ! Il faudrait cependant montrer que le processus d'orthogonalisation de Gram-Schmidt constitue une transformation orthogonale. Nous le ferons en TD.

Un seul point noir se profile à l'horizon : cela ne marche que si la matrice A représente effectivement un produit scalaire, il faut pour cela qu'elle soit auto-adjointe, c'est-à-dire symétrique réelle dans les cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Propriété 53 (Condition suffisante de diagonalisation des endomorphismes).

Soit A une matrice autoadjointe, alors elle diagonalisable.

6

Application à la résolution de problèmes courants

6.1 Introduction

Cette partie constitue l'aboutissement de ce cours. On y résout de façon très générale des problèmes linéaires, courants en physique. Ces problèmes vont de la résolution d'équations différentielles à la recherche des modes propres d'oscillation forcée d'un circuit électrique, en passant par la recherche du terme général d'une suite linéaire récurrente d'ordre quelconque. La rigueur du raisonnement mathématique fait apparaître exhaustivement tous les cas de figure : phénomènes de résonance, pulsations des mode propres. L'interprétation détaillée des objets mathématiques qui apparaissent dépend du problème physique considéré, et constitue le travail du physicien à part entière. Le point de vue géométrique des mathématiciens permet cependant des cimplifications dans les calculs. C'est pourquoi nous choisissons une formulation générique des problèmes, dans leur incarnation la plus mathématique, les exemples évoqueront seulement le cadre physique considéré.

6.2 Equations différentielles linéaires

DÉFINITION 48 (Equation différentielle, ordre de l'équation).
Une *équation différentielle* est une équation qui a pour inconnue une fonction. Elle se présente comme une relation entre une fonction et ses dérivées.

De façon générale, pour une fonction inconnue $y : x \mapsto y(x)$, une équation différentielle peut s'écrire

- Sous *forme implicite* $G(x, y(x), y'(x), y''(x) \dots y^{(n)}(x)) = 0$ où G est une fonction réelle.
- Sous *forme résolue* $y^{(n)}(x) = f(x, y(x), \dots y^{n-1}(x))$

L'ordre $n \in \mathbb{N}$ de la plus haute dérivée qui apparaît est appellé *ordre de l'équation.*

Exemples.

L'équation du pendule pesant $y'' + sin(y) = 0$.

L'équation de l'oscillateur harmonique $y'' + y = 0$.

L'équation $exp(3y\cos(y'')) = 0$.

Propriété 54.
Lorsqu'elle est sous forme résolue, on peut toujours transformer une équation d'ordre n pour une fonction réelle inconnue en une équation d'ordre 1 pour une fonction vectorielle. Pour cela il suffit de poser la fonction vectorielle inconnue $Y = (y_1, \dots y_n)$, et l'équation $f(x, y(x), y'(x), y''(x) \dots y^{(n)}(x)) = 0$

se réécrit

$$\begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_{n-1} \\ y'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ f(x, y_1, \dots y_n) \end{pmatrix}$$

autrement dit $Y' = F(x, Y)$, où Y est une fonction vectorielle dans $\mathbb{R}^n$.

Il est alors très simple de déduire une solution de l'équation initiale en extrayant la première composante de la solution Y_s, y_1.

[1]

1. On remarquera que cela est différent d'écrire (y,y'') = ... Ici on pense vraiment la dynamique dans l'espace des phases. TOMAKECLEAR!!!!!!!

Exemples.

L'équation du pendule pesant devient $(y'_1, y''_2) = (-y'', -sin(y))$

L'équation $exp(3y\cos(y'')) = 0$ devient alors la suivante :

DÉFINITION 49.
On dit qu'une équation mise sous la forme $Y' = F(x, Y)$ est linéaire lorsque la fonction F est une application linéaire pour les variables Y. On peut alors l'écrire sous forme matricielle :

$$Y' = A(x)Y + B(x)$$

où $A(x) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B(x)\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$. Si de plus, les matrices A et B ne dépend pas de x, on dit que l'équation est *autonome*, si $B(x) = 0$ on dit que l'équation est homogène.

Exemples.

exemple 1

exemple 2

exemple 3

Le reste de cette partie donne une méthode de résolution systématique des équations différentielles linéaires autonomes, c'est cette méthode qu'il est important de maîtriser! Nous admettrons qu'il existe une toujours une solution à une telle équation.

Considérons l'équation $(\mathscr{E})$: $Y' = AY$ où A est une matrice carrée réelle de taille $n \in \mathbb{N}$, ou pourquoi pas complexe, avec pour condition initiale $Y(0) = Y_0$.

1. On commence par rechercher les valeurs propres $\lambda_i, i \in \{1 \dots n\}$de A, ce sont les racines du polynôme caractéristique $\chi_A(\lambda)$.
2. On cherche alors des vecteurs propres de A, qui vérifient $AV_i = \lambda_i V_i$ et $V_i \neq 0$. Puisque A est diagonalisable on peut en faire une base $\mathscr{D}$ de l'espace vectoriel.
3. Il est alors simple de lire l'équation d'évolution de Y dans cette base, car si l'on note $Y_0 = (d_1, \dots, d_n)_{\mathscr{D}}$ chacune des composantes suit une évolution exponentielle, donc $Y(t) = (d_1 e^{\lambda_1 x}, \dots, d_n e^{\lambda_n x})_{\mathscr{D}}$.

Il arrive que la matrice ne soit pas diagonalisable, mais que l'on ait tout de même $(A - \lambda_i I_n)^{\alpha_i}$ pour un certain entier i. On peut alors montrer qu'il . Ceci intervient quand on étudie des phénomènes de résonance en physique, par exemple un oscillateur harmonique qui serait forcé à sa pulsation propre.

6.3 *Terme général d'une suite linéaire récurrente.*

Parfois, nous sommes confrontés à des suites définies par une relation de récurrence. Lorsque cette relation est linéaire, il est possible d'expliciter le terme général de la suite par une méthode systématique.

DÉFINITION 50.

On dit qu'une suite $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est définie par une *relation de récurrence d'ordre* $p \in \mathbb{N}$ lorsqu'elle vérifie une relation de la forme

$$u_{n+p} = a_0 u_n + a_1 u_{n+1} \dots a_{p-1} u_{n+p-1}$$

et que l'on se fixe les p premiers termes.

Propriété 55.

On peut toujours reformuler une relation de récurrence d'ordre p sur la suite réelle (u_n) en une relation d'ordre 1 sur une suite vectorielle. Il suffit d'introduire la suite vectorielle (U_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ \vdots \\ u_{n+p} \end{pmatrix}$$

dans $\mathbb{R}^p$ *muni de la base canonique.*

La relation de récurrence devient alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} := \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ \vdots \\ u_{n+p+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ & & & \vdots \\ a_0 & a_1 & \dots & a_{p-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ \vdots \\ u_{n+p} \end{pmatrix}$$

et à fixer U_0 *dans* $\mathbb{R}^p$.

Autrement dit, on a $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = AU_n$ *et* $U_0 = V \in \mathbb{R}^p$. *Où* $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ *représente un endomorphisme de* $\mathbb{R}^p$.

Pour obtenir le terme général de la suite il suffit alors de calculer la puissance n-ème de la matrice A, ce qui peut être fait au moyen d'une diagonalisation quand cela est possible, ou d'une mise sous forme de Jordan lorsque c'est impossible.

6.4 *Modes d'oscillation forcée*

6.5 *Algèbre tensorielle, espace tangent*

Covariance, contravariance.

6.6 *Nature profonde des opérateurs vectoriels utilisés en électromagnétisme*

Interprétation géométrique dans l'espace tangent.