A retenir
TD7 : Energie Electrostatique
semaine du 16 octobre 2017

TD présenté par :
Samuel Cazayus-Claverie

samuel.cazayus-claverie@u-psud.fr

Les définitions importantes :

- L'*énergie électrostatique* d'un système de charges en interaction correspond au travail mécanique que doit effectuer un opérateur extérieur pour construire ce système de façon *quasistatique*.
- La transformation d'un système physique est dite *quasistatique* si elle laisse le système à chaque instant en équilibre mécanique. Cela signifie que la somme des forces exercées sur chacun des sous-éléments du système est nulle à tout instant. Il s'agit d'une situation idéalisée qui suppose une attente infiniment longue à chaque modification infinitésimale du système.

Les formules à retenir :

- L'énergie électrostatique d'un système de charges discrètes $(q_i)_{i\in\{1\ldots n\}}$ aux positions de l'espace $(M_i)_{i\in\{1\ldots n\}}$ s'écrit :
$$U_{discret} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i V_i(M_i)$$
où V_i correspond au potentiel créé par les charges différentes de q_i.
- L'énergie électrostatique d'une distribution continue de charges $\mathcal{D}$ (de densité surfacique σ ou volumique ρ) s'écrit
$$U_{continu} = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{D}} dq(\vec{r})V(\vec{r}).$$
Il s'agit d'une formule strictement analogue au cas discret, il suffit de comprendre l'intégrale (surfacique, volumique ou linéique, il n'y a pas de différence fondamentale) comme un signe somme, et de remplacer l'indice discret $i \in \{1\ldots n\}$ par un *indice continu* $\vec{r}$; on note $dq(\vec{r})$ la charge élémentaire contenue au voisinage de $\vec{r}$ pour bien se rappeler qu'il s'agit d'un infiniment petit du même ordre que l'élément de surface qui le porte. De façon explicite on remplace le signe somme par une intégrale et $dq(\vec{r})$ par $\sigma(\vec{r})d^2S$ ou $\rho(\vec{r})d^3\tau$:
$$U = \frac{1}{2}\iint_{\mathcal{S}} d^2S\sigma(\vec{r})V(\vec{r}) \tag{1}$$
$$U = \frac{1}{2}\iiint_{\mathcal{V}} d^3\tau\rho(\vec{r})V(\vec{r}) \tag{2}$$
Les plus attentifs d'entre vous auront remarqué que l'on considère ici le potentiel créé par toute la distribution de charges. Ils pourraient penser que l'on doit exclure la contribution propre de la charge $dq(\vec{r})$. On peut cependant faire tendre cette contribution vers 0 avec l'élement de volume/surface : il n'y a donc pas lieu de prendre cette précaution.
- On peut aussi attribuer une densité volumique d'énergie électrostatique due au champ électrique lui-même, sans se préoccuper de ses sources. Cette dernière s'écrit :
$$u(M) = \epsilon_0\frac{\|\vec{E}(M)\|^2}{2}$$
.

Les méthodes à retenir :

- Il y a deux façons de calculer l'énergie électrostatique d'une distribution de charges : elles correspondent toutes deux à deux points de vue légèrement différents.
  La première fait explicitement la distribution de charges selon les expressions de $U_{continu}$ et $U_{discret}$ vues plus haut. La seconde fait intervenir le champ électrique directement : elle consiste à sommer les contributions élémentaires $dU(\vec{r}) = u(\vec{r})d^3\tau$ sur tout l'espace.
  La première met l'accent sur la distribution de charges, vue comme source du champ. La seconde permet de ne pas s'interroger quant aux sources du champ, en particulier elle n'est pas sensible au caractère discret ou continu de la distribution. Elle nous dit de plus comment est *localisée* l'énergie dans l'espace en attribuant de l'énergie au champ électrique lui-même.
- Pour intégrer en coordonnées sphériques, on peut écrire

  $$\iiint_{\mathbb{R}^3} d^3\tau(\ldots) = \int_{r=0}^{+\infty}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\phi=0}^{2\pi} r^2 dr\sin(\theta)d\theta d\phi(\ldots)$$

  Mais on peut aussi utiliser l'élément d'angle solide $d^2\Omega(\theta,\phi) = \sin(\theta)d\theta d\phi$:

  $$\iiint_{\mathbb{R}^3} d^3\tau(\ldots) = \int_{r=0}^{+\infty}\int_{\mathcal{S}(r=1)} r^2 dr d\Omega$$

  On interprète l'angle solide comme la surface de sphère unité $\mathcal{S}(r=1)$ que masque l'élément de volume $d\tau$ pour un observateur $(\mathcal{O})$ placé à l'origine. Autrement dit, c'est 4π fois la proportion du champ de vision que $d\tau$ cache à $(\mathcal{O})$.