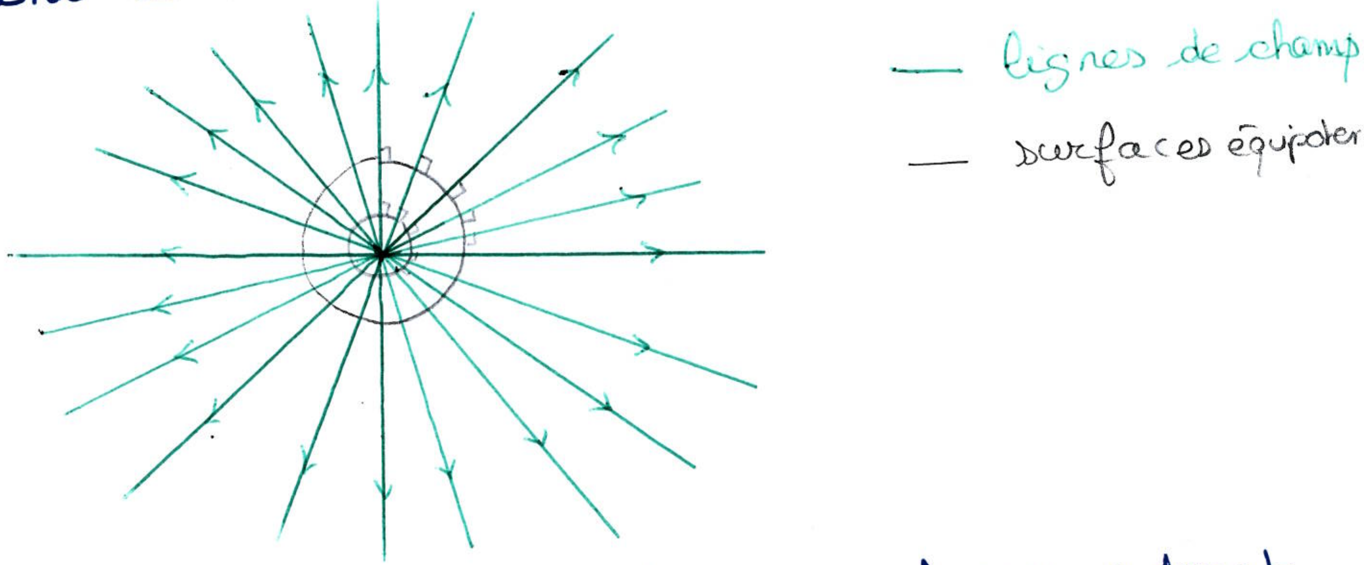
Correction interro n° 1

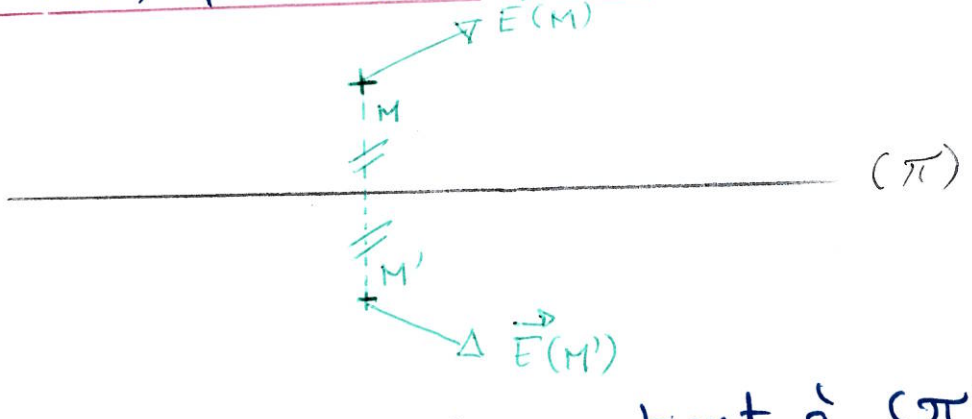
1er octobre 2018

Exercice n° 1 :

1. Les surfaces équipotentielles et les lignes de champ d'une charge $q > 0$ placée à l'origine sont les suivantes :



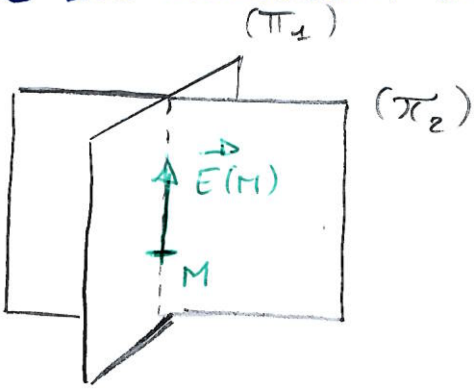
2. ⓐ Si une distribution de charges admet un plan de symétrie (π), il en est de même pour le champ électrique : $\vec{E}(M)$ est donc symétrique de $\vec{E}(M')$ par rapport à (π) ; plus visuellement :



ⓑ Dès lors que M appartient à (π), cela interdit toute composante hors du plan pour $\vec{E}(M)$ car il doit être égal à son symétrique.

Donc $\vec{E}(M) \in (\pi)$

© Si deux plans de symétrie des charges passent par M, $\vec{E}(M)$ doit appartenir à leur intersection, ce qui détermine sa direction sans ambiguïté :



Exercice 2 :

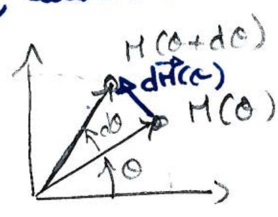
Considérons le champ $\vec{E}(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{cart.}$

1. ⓐ Un point d'angle polaire θ sur le cercle de rayon r de centre O admet pour coordonnées

$$\boxed{\vec{OM}(\theta) = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}_{cart.}}$$

ⓑ θ varie de 0 à $\frac{\pi}{2}$ sur $\mathcal{T}_1$ parcouru en sens trigonométrique.

ⓒ Le vecteur tangent correspond à une variation infinitésimale de $\vec{OM}(\theta)$ sur la courbe, autrement dit :



$$\vec{dM}(\theta) = \frac{\partial \vec{OM}(\theta)}{\partial \theta} d\theta$$

$$\boxed{\vec{dM}(\theta) = \begin{pmatrix} -r\sin\theta \\ r\cos\theta \end{pmatrix} d\theta}$$

ⓓ $$\mathcal{E}_1 = \int_{M \in \mathcal{T}_1} \vec{E}(M) \cdot \vec{dM}$$

$$= \int_{\theta=0}^{\pi/2} \vec{E}(M(\theta)) \cdot \vec{dM}(\theta)$$

$$= \int_{\theta=0}^{\pi/2} \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -r\sin\theta \\ r\cos\theta \end{pmatrix} d\theta$$

$$= \boxed{0}$$

2. (a) Un point $N \in \Gamma_2$ d'abscisse x admet pour coordonnées cartésiennes:

$$\boxed{\overrightarrow{ON}(x) = \begin{pmatrix} x \\ r - x \end{pmatrix}}$$

(b) x varie de r à 0.

(c) $\overrightarrow{dN}(x) = \dfrac{\partial \overrightarrow{ON}(x)}{\partial x}\, dx$

$$\boxed{\overrightarrow{dN}(x) = \begin{pmatrix} dx \\ -dx \end{pmatrix}}$$

cependant, <u>dx est négatif</u> puisque x varie de r à

(d) $$\mathcal{E}_2 = \int_{N \in \Gamma_2} \vec{E}(N) \cdot \overrightarrow{dN}$$
$$= \int_{x=r}^{0} \begin{pmatrix} x \\ r - x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ -dx \end{pmatrix}$$
$$= \int_{r}^{0} \left[x + (r - x) \cdot (-1) \right] dx$$
$$= -\int_{0}^{r} (2x - r)\, dx$$
$$= -\left[x^2 - r x \right]_0^r$$
$$\boxed{\mathcal{E}_2 = 0}$$

3. On calcule les dérivées croisées:
$$\begin{cases} \partial_x E_y = \partial_x y = 0 \\ \partial_y E_x = \partial_y x = 0 \end{cases}$$

- Le critère de Schwarz est vérifié donc $\vec{E}$ dérive <u>d'un gradient.</u>
- <u>N.B:</u> Il est équivalent de dire que $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{E} = 0$ donc que $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$

Cherchons $V(x,y)$ tel que $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$.

$$\begin{cases} -\partial_x V = x \\ -\partial_y V = y \end{cases}$$

$$\begin{cases} V(x,y) = \dfrac{x^2}{2} + f(y) \\ -\partial_y V = y \end{cases}$$

$$\begin{cases} V(x,y) = -\dfrac{x^2}{2} + f(y) \\ -f'(y) = y \end{cases}$$

$$\begin{cases} V(x,y) = -\dfrac{x^2}{2} \\ f(y) = -\dfrac{y^2}{2} + A, \quad A \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Réciproquement, $V(x,y) = -\dfrac{x^2+y^2}{2} + A$ donne bien $\vec{E}$.

Donc $\boxed{V(x,y) = -\dfrac{x^2+y^2}{2}}$ est un potentiel dont dérive $\vec{E}$. (On a choisi $A = 0$)