TD 1

Systèmes de coordonnées et éléments d'intégration

1 Coordonnées cartésiennes

1. Donner l'élément de volume défini par une variation élémentaire des variables x, y et z ($x \to x + dx$, $y \to y + dy$, $z \to z + dz$).
2. En déduire le volume d'une pyramide de base carrée de hauteur vaut h et dont le côté de la base est a.

2 Coordonnées polaires

1. Rappeler la définition des coordonnées polaires (ρ, θ) et de la base polaire.
2. Soit un cercle de centre O et de rayon R. Donner l'angle élémentaire $d\theta$ correspondant à l'arc de cercle de longueur dl. En déduire l'aire du secteur compris entre les angles θ et $\theta + d\theta$. Retrouver finalement l'aire du disque de rayon R.

3 Coordonnées cylindriques

1. Rappeler la définition des coordonnées cylindriques (ρ, θ, z) et de la base cylindrique.
2. Donner l'élément de surface défini par une variation élémentaire de θ et z ($\theta \to \theta + d\theta$,$z \to z + dz$). En déduire l'aire d'un cylindre de rayon R et de hauteur H.
3. Donner l'élément de volume défini par une variation élémentaire des 3 coordonnées ρ, θ et z ($\rho \to \rho + d\rho$, $\theta \to \theta + d\theta$,$z \to z + dz$). En déduire le volume d'un cylindre de rayon R et de hauteur H.
4. Calculer l'aire et le volume d'un cône de hauteur H et de rayon R à la base.
5. Soit un cylindre d'axe Oz, de rayon R et de hauteur H. Ce cylindre est chargé en surface avec une densité $\sigma(\rho, \theta, z) = \sigma_0 \cos\theta$. Quelle est la dimension de σ. Calculer la charge totale Q portée par le cylindre. Pouvait-on prévoir le résultat sans calcul ?

4 Coordonnées sphériques

1. Rappeler la définition des coordonnées sphériques (r,θ,φ) et de la base sphérique.
2. Donner l'élément de volume défini par une variation élémentaire des 3 coordonnées r, θ et φ ($r \to r + dr$, $\theta \to \theta + d\theta$,$\varphi \to \varphi + d\varphi$). En déduire le volume d'une sphère de rayon R.
3. On se déplace à la surface d'une sphère de rayon R, sur un méridien (c'est-à-dire à φ constant). Quelle est la longueur parcourue quand l'angle θ augmente d'une quantité $d\theta$? Même question si l'on se déplace sur un parallèle (c'est-à-dire à θ constant) quand l'angle φ augmente d'une quantité $d\varphi$? Déduire de ce qui précède l'élément de surface dS entre les deux parallèles correspondant respectivement aux angles θ et $\theta + d\theta$ et les deux méridiens correspondant respectivement aux angles φ et $\varphi + d\varphi$. Calculer finalement l'aire de la sphère.

4. Donner le volume élémentaire entre les deux sphères de rayon r et $r+dr$. Donner aussi le volume élémentaire entre ces deux sphères et délimité par les deux parallèles et les deux méridiens de la question précédente. Utiliser chacun de ces deux éléments de volume pour retrouver le volume d'une sphère de rayon R.
5. Soit une sphère de rayon R. Calculer la surface d'une calotte de cette sphère, définie par $\theta < \theta_0$.

TD 2

Champs de gradient et énergie potentielle

1 Gradient

1. Exprimer en fonction du vecteur $\vec{r}$ ($\vec{r} = \overrightarrow{OM}$) et de sa norme r les gradients des fonctions :
   - $F_1(r) = r$
   - $F_2(r) = 1/r$

   On rappelle l'expression du gradient en coordonnées sphériques :

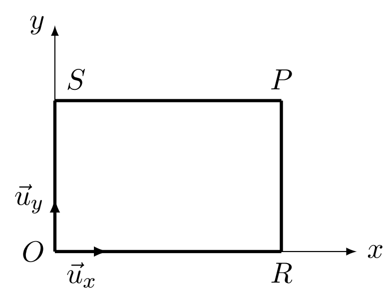
$$\vec{\nabla} = \vec{u}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{u}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{u}_\phi \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \phi}$$

2. Calculer le gradient de $F_2(r, \theta) = \cos\theta / r^2$
3. Montrer que le gradient d'une fonction $V(r)$ qui ne dépend que de r est un vecteur radial (c'est-à-dire colinéaire à $\overrightarrow{OM}$) dont la norme ne dépend également que de r.

2 Circulation

Définissons maintenant le champ $\vec{E}(M)$ par $\vec{E}(M) = 2xy\vec{u}_x + (x^2 - y^2)\vec{u}_y$. Calculer la circulation entre l'origine O et un point quelconque P, de coordonnées x_1 et y_1, le long des trois trajets suivants (voir figure ci-contre)

1. en ligne droite de O à R puis en ligne droite de R à P
2. en ligne droite de O à S puis en ligne droite de S à P
3. directement en ligne droite de O à P
4. Si $\vec{E}$ est un gradient (ce qui est le cas), les trois calculs doivent donner le même résultat, à savoir $F(P) - F(O)$, où F est une fonction (inconnue) dont $\vec{E}$ est le gradient. On choisit par convention F nul à l'origine. Quelle est la fonction F ?
5. Vous pouvez maintenant vérifier que le gradient de F est bien le vecteur $\vec{E}$.



TD 3

Loi de Coulomb, Champ et potentiel électrostatiques : Distributions de charge discrètes

1 Symétries

Trois charges égales sont fixées aux points A, B et C équidistants d'un point O situé dans le même plan qu'eux.

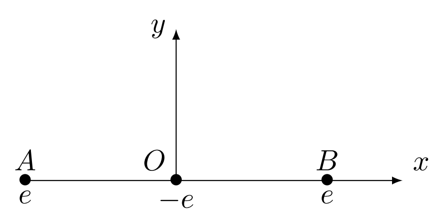
1. En utilisant les symétries, déterminer graphiquement la direction de $\vec{E}$ au point O dans le cas où A, B et C forment un triangle isocèle.
2. Quelle figure géométrique doivent former les points A, B et C pour que $\vec{E}$ soit nul au point O ?

2 Quatre charges au sommet d'un carré

Quatre charges q_A, q_B, q_C et q_D sont maintenues aux sommets d'un carré de côté a.

1. Soient $q_A = q_C$ et $q_B = q_D$. Calculer le champ électrique et le potentiel au centre O du carré.
2. Soient $q_A = 2q_B$ et $q_C = q_D = 0$. Préciser la position du point P où le champ créé est nul.
3. Soient $q_A = -q$ et $q_B = q_C = q_D = q$. Déterminer la force électrostatique que les trois charges placées en B, C et D exercent sur la charge placée en A.

3 Trois charges alignées



Trois charges e, $-e$ et e (avec $e > 0$) sont maintenues fixes aux points A, O et B ($AO = OB = a$) selon le schéma ci-dessus.

1. Quelle est la force résultante s'exerçant sur chacune des charges ? Les charges e sont des ions supposés très lourds et immobiles alors que la charge $-e$ est un électron mobile.
2. L'équilibre de l'électron est-il stable par rapport à de petits déplacements le long de la droite joignant les deux ions ? par rapport à de petits déplacements le long de la médiatrice des deux ions ? Répondre sans faire de calcul.
3. On lâche sans vitesse initiale l'électron depuis un point M de la médiatrice tel que $OM = y \ll a$. Quel est son mouvement ? Donner l'expression de sa période.
4. La charge en O est maintenant e. Elle est lâchée d'un point M de la droite (AB) tel que $OM = x \ll a$. Reprendre qualitativement les deux questions précédentes.

TD 4

Loi de Coulomb, Champ et potentiel électrostatiques : Distributions de charge continues

1 Carré

On considère un carré de centre O et de côté a, portant une charge uniformément distribuée sur son contour. On désigne par M et M' deux points de la normale Oz, symétriques l'un de l'autre par rapport au plan du carré.

1. Donner les plans de symétrie de la distribution de charge contenant Oz.
   Soit Π l'un de ces plans de symétrie et soit un point N quelconque appartenant à Π. Soient P et P' deux points de la distribution de charge, symétriques par rapport à Π.
2. Comparer les composantes de $\overrightarrow{PN}$ et $\overrightarrow{P'N}$.
3. En déduire que le champ électrostatique $\vec{E}(N)$ est contenu dans le plan Π.
4. Par un raisonnement analogue, établir la relation entre $\vec{E}(M)$ et $\vec{E}(M')$.
5. En déduire la valeur du champ $\vec{E}$ au point O si $\vec{E}$ est continu.

2 Boule sphérique

Soit O un point fixe de l'espace. Tout point M est repéré par le vecteur $\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r$ où $\vec{u}_r$ est un vecteur unitaire radial. Soit une densité de charge volumique $\rho(M) = \rho(r)$.

1. Montrer par des considérations de symétrie que le champ électrostatique créé par une sphère chargée uniformément est de le forme $\vec{E}(M) = E(r)\vec{u}_r$.
2. Donner l'allure des lignes de champ et des surfaces équipotentielles.

3 Cylindre

On considère un fil cylindrique de rayon R chargé avec une densité de charge volumique $\rho(M) = \rho(r)$ où r désigne la distance du point M à l'axe du fil.

1. Quelles sont les composantes non nulles du champ électrostatique pour un fil de longueur finie L.
2. Même question pour un fil de longueur très supérieure à R, donc considéré comme infiniment long. Donner l'allure des lignes de champ et des surfaces équipotentielles dans ce cas.

4 Disque

On s'intéresse au champ électrostatique créé par un disque plan sans épaisseur, de centre O, de rayon R et de charge totale Q. La charge est répartie uniformément sur toute la surface du disque, avec une densité σ. On se propose d'exprimer le champ électrostatique en tout point M de l'axe $[Oz)$ perpendiculaire au disque. On appellera $\vec{u}_z$ le vecteur unitaire de l'axe $[Oz)$.

1. Quelle est la direction de $\vec{E}(M)$?
2. De quelles variables dépend-il ?

3. Exprimer $\vec{E}(M)$
   - au voisinage du disque ($z \ll R$).
   - sur le disque ($z = 0$). Commenter.
   - loin du disque ($z \gg R$). Commenter.
4. Tracer le graphe de $E(z)$, où $E(z) = \vec{E}(M) \cdot \vec{u}_z$.
5. Calculer le potentiel en M.
6. Utiliser les résultats précédents pour déterminer le champ créé en **tout point** de l'espace par un plan infini chargé uniformément avec une densité σ.

5 Surfaces équipotentielles

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier vos réponses.

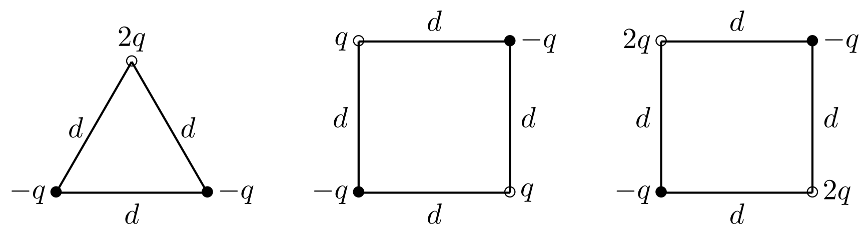
1. En tout point d'une surface équipotentielle le champ électrostatique a le même module.
2. Le champ électrostatique est orthogonal à la surface équipotentielle en tout point.
3. Deux surfaces équipotentielles ne peuvent se couper en un point que si le champ électrostatique est nul en ce point.
4. En un point de l'espace où le potentiel électrique est nul le champ électrostatique est nécessairement nul. Et réciproquement ?
5. En une région (continue) de l'espace où le potentiel électrique est constant le champ électrostatique est nécessairement nul.

TD 5

Dipôle, moments dipolaire

1 Notion de moment dipolaire

1. Définir le moment dipolaire par rapport à un point O, d'un ensemble de N charges électriques q_i situées aux points M_i.
2. Montrer que si $\sum_i q_i = 0$, le moment dipolaire $\vec{P}$ est indépendant du choix de O. Exprimer alors $\vec{P}$ en fonction de G_p, G_n et Q, où G_p est le barycentre des charges positives, G_n celui des charges négatives, et Q la somme des charges positives.
3. Calculer les moments dipolaires des distributions de charge suivantes :



2 Champ électrostatique créé par un dipôle

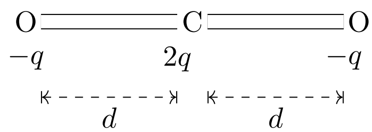
On considère un dipôle constitué par deux charges opposées $-q$ et $+q$ placées respectivement en deux points distincts N et P. On utilisera les coordonnées sphériques avec une origine O confondu avec le milieu de NP et on prendra l'axe Oz suivant $\overrightarrow{NP}$.

1. Trouver la (les) invariance(s) de la figure de charges. En déduire de quelles variables doit dépendre le potentiel V_d.
2. Calculer V_d à grande distance du dipôle, c'est-à-dire aux points M tels que $OM \gg NP$. On se limitera au premier ordre non-nul de l'approximation dipolaire, et on prendra $V_d(r) = 0$ lorsque $r \to \infty$.
3. Donner l'équation des surfaces équipotentielles $r = r(\theta)$. En dessiner quelques-unes.
4. En déduire l'expression du champ $\vec{E}_d(M)$ créé par ce dipôle.
   On donne l'expression du gradient en coordonnées sphériques :
$$\overrightarrow{\text{grad}} V = \frac{\partial V}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}\vec{u}_\phi$$
5. Dessiner l'allure de quelques lignes de champ sur le graphe précédent.
6. *Facultatif* : Calculer l'équation des lignes de champ $r = r(\theta)$.
7. On superpose à $\vec{E}_d$ un champ uniforme $\vec{E}_0$ parallèle à $[Oz)$. Le potentiel V_0 associé à $\vec{E}_0$ est défini par la condition $V_0(z = 0) = 0$. Déterminer le potentiel total V. En déduire la surface équipotentielle $V(r, \theta) = 0$. Quelle inégalité doit satisfaire $\vec{E}_0$ pour que l'on puisse appliquer l'approximation dipolaire sur cette surface ? Calculer alors le champ total $\vec{E}$ sur cette surface.

3 Moment quadrupolaire de la molécule CO_2

Exercice facultatif

La molécule CO_2 est schématisée dans la figure ci-dessous : les trois atomes sont alignés.



1. Que vaut le moment dipolaire ?
2. On se propose de calculer le potentiel crée par la molécule. On se limitera aux points M se trouvant à grande distance de CO_2 : $CM = r \gg d$. Exprimer le potentiel en vous limitant à l'ordre 2 en d/r.
3. En déduire le champ électrique.

On donne le développement limité $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}} \simeq 1 - \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{8}x^2 + \cdots$.

TD 6

Théorème de Gauss

1 Notion de flux

1. On place une charge ponctuelle q au centre d'un cube. Calculer le flux du champ électrique à travers l'une des faces du cube en vous aidant du théorème de Gauss.
2. On place une charge ponctuelle q au centre d'un cylindre de hauteur H et de rayon R. Calculer le flux du champ électrique à travers la surface latérale du cylindre.

2 Applications du théorème de Gauss

1. Une sphère de rayon R est chargée en surface avec une densité de charge surfacique, uniforme, σ. Calculer le champ et le potentiel électrostatiques en tout point de l'espace.
2. Applications :
   (a) Le champ à partir duquel l'air perd ses propriétés isolantes et laisse survenir une décharge est d'environ 1 MV/m (il dépend fortement de l'humidité de l'air). Quelle est la charge maximale que l'on peut déposer sur une sphère de rayon 10 cm ?
   (b) Au Palais de la découverte à Paris, un générateur d'électrons charge une sphère de rayon 10 cm à un potentiel de 350 kV. Combien d'électrons sont déposés sur la sphère ?
   (c) On mesure à la surface de la Terre un champ électrique dont la norme vaut environ 100 V/m. La terre étant considérée comme un matériau conducteur, en déduire la densité surfacique de charge négative sur le sol.
3. Une boule sphérique de rayon R est chargée en volume avec une densité $\rho(r) = \rho_0 r/R$. Calculer le champ électrique créé en tout point de l'espace. Donner ensuite le potentiel $V(r)$ pour tout r.
4. Un cylindre de longueur infinie et de rayon R est chargé avec une densité surfacique uniforme σ. Calculer le champ électrique en tout point de l'espace. En déduire le potentiel.
5. Une plaque d'extension infinie et d'épaisseur h est chargée uniformément en volume avec une densité ρ. Calculer le champ électrique puis le potentiel créés en tout point de l'espace.
6. Même question pour une plaque d'extension infinie et infiniment mince, de densité surfacique σ. Vérifier que l'on obtient les mêmes résultats en faisant tendre vers 0 l'épaisseur de la plaque de la question précédente.
7. On considère deux plaques parallèles, infinies et infiniment minces, l'une de densité σ et l'autre de densité $-\sigma$. Déduire de la question précédente le champ électrique en tout point.

TD 7

Energie électrostatique

Le potentiel électrostatique sera pris nul à l'infini. On pose $k = 1/(4\pi\epsilon_0)$.

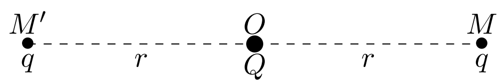
1 Trois charges ponctuelles

Calculer l'énergie électrostatique lorsque les charges sont égales à q et disposées aux sommets d'un triangle équilatéral de côté l. On utilisera deux méthodes.

2 Trois charges ponctuelles alignées

Une charge positive Q est placée en O. Aux points M et M', symétriques par rapport à O, sont fixées deux autres charges ponctuelles de même valeur q.

On note r la distance de M et de M' à O. On désigne par $\vec{F}_M$ et $\vec{F}_{M'}$ les forces électrostatiques totales exercées sur M et M', respectivement. On pose $U_0(r) = kq^2/r$, $F_0(r) = kq^2/r^2$ et $\alpha = Q/q$.



a Calcul de l'énergie électrostatique

1. Exprimer l'énergie électrostatique $U(r)$ de ce système en fonction de U_0 et de α, par deux méthodes différentes.
2. Etudier le signe de $U(r)$ en fonction de α.
3. Considérons les valeurs $\alpha = 1$ et $\alpha = -2$. Pour chacun des deux cas :
   — Proposer des valeurs pour q et Q.
   — Tracer le graphe de $U(r)$.
   — Si les charges étaient lâchées, que se passerait-il ?
   — Représenter la direction et le sens des forces $\vec{F}_M$ et $\vec{F}_{M'}$.

b Calcul des forces exercées sur les charges en M et M'

On se propose de calculer $\vec{F}_M$ et $\vec{F}_{M'}$ connaissant la valeur de l'énergie électrostatique.

1. Le point M est déplacé de dr (valeur algébrique) et le point M' de manière symétrique par rapport à O de telle façon que les points M, M' et O restent alignés. Calculer la variation correspondante dU de l'énergie électrostatique du système, en fonction de dr, $F_0(r)$ et α.
2. Ce déplacement a été réalisé par un opérateur. Montrer que ce dernier a dû fournir un travail infinitésimal égal à $\delta W = -2F_M dr$ si F_M désigne la valeur algébrique de la force électrostatique subie par la charge au point M.
3. En déduire $\vec{F}_M$ et $\vec{F}_{M'}$ en fonction de α.
4. Retrouver ces valeurs grâce à la force de Coulomb.

3 Sphère chargée en surface

Soit une sphère de rayon R portant la charge Q. On suppose qu'elle est chargée uniformément en surface, avec une densité surfacique σ. On pose $U_0 = kQ^2/R$.

1. Calculer le champ électrique en tout point.
2. En déduire le potentiel électrostatique. On prendra $V = 0$ à l'infini.
3. Exprimer l'énergie électrostatique U en fonction de U_0.
4. Définir la densité locale d'énergie en tout point de l'espace.
5. En déduire une nouvelle fois l'energie électrostatique.

4 Boule chargée en volume

La sphère est maintenant chargée uniformément en volume, avec une densité volumique ρ.

1. Reprendre les 4 questions précédentes.
2. On peut aussi évaluer U en imaginant que la boule est construite par couches successives de coquilles sphériques concentriques de rayon r et d'épaisseur dr. Retrouver U avec cette méthode.
3. Quel cas demande le plus d'énergie : charger une sphère en surface ou en volume ?

TD 8

Equations locales, Conducteurs

Soit une sphère conductrice de rayon R à l'équilibre électrostatique, portant une charge totale Q. On se propose de calculer le champ et le potentiel électriques qu'elle crée, à l'aide des équations locales.

1 Forme locale du théorème de Gauss

1. En utilisant les symétries et invariances du système, donner la direction de $\vec{E}$ et les variables dont il dépend.
2. Où se trouvent les charges portées par cette sphère ? Calculer la densité σ des charges à la surface du conducteur.
3. Calculer $\vec{E}$ en utilisant l'équation locale de Maxwell-Gauss.
4. Quelle condition à la surface faut-il imposer pour trouver la solution au problème posé ? Appliquer cette condition et en déduire la solution de l'équation locale dans le cas de la sphère.

On donne

$$\mathrm{div}\vec{E} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 E_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta E_\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial E_\phi}{\partial\phi}$$

2 Equation de Poisson

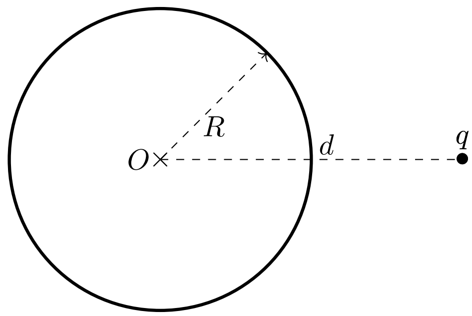
1. À partir de l'équation locale $\mathrm{div}\vec{E} = \rho/\epsilon_0$, et en utilisant la définition en coordonnées cartésiennes des opérateurs divergence et gradient, établir l'équation de Poisson. Vérifier que cette équation est valable en utilisant les coordonnées sphériques (voir les expressions ci-dessous) :
2. Cette équation est-elle valable dans tout système de coordonnées ? De par les symétries, de quelle(s) variable(s) dépend le potentiel V ? Trouver la solution générale de cette équation.
3. Quelles sont les conditions aux limites dans le cas particulier de la sphère ? En déduire V. Retrouver à partir de V le champ $\vec{E}$ de la question précédente.
4. Calculer la capacité de la sphère isolée.

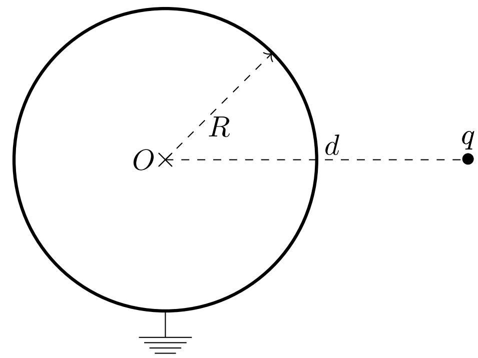
On donne

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}\vec{E} &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 E_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta E_\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial E_\phi}{\partial\phi} \\
\overrightarrow{\mathrm{grad}}V &= \frac{\partial V}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta}\vec{u}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial\phi}\vec{u}_\phi \\
\Delta V &= \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right)
\end{aligned} \tag{1}$$

3 Boule conductrice et charge ponctuelle

On considère une boule conductrice de rayon R et de centre O.





1. Dans une première expérience (Figure de gauche), la boule est neutre, et elle n'est reliée par aucun fil conducteur à quoi que ce soit. Sa charge totale reste donc égale à zéro quoi qu'il arrive.
   On approche de la boule une charge ponctuelle q, qu'on maintient en un point situé à une distance d de O. Des charges superficielles apparaissent alors sur la boule.
   (a) Où la densité superficielle de charge de la boule est-elle la plus forte ?
   (b) Quelle courbe forment l'ensemble des points qui ont la même densité superficielle de charge qu'un point M donné ?
   (c) Dessiner approximativement l'allure de quelques lignes de champ, en les orientant.
   (d) Calculer, en fonction de q et d, le potentiel de la boule.
   Indication : penser à un point priviligié à l'intérieur de la boule.
2. Dans une deuxième expérience (Figure de droite), la boule est reliée par un fil conducteur à la terre ("masse"). Elle forme avec la terre un conducteur unique : quoi qu'il arrive, son potentiel reste nul.
   (a) Calculer la charge totale qui apparaît à la surface de la boule.
   (b) Dessiner quelques lignes de champ et les orienter.

TD 9
Conducteurs

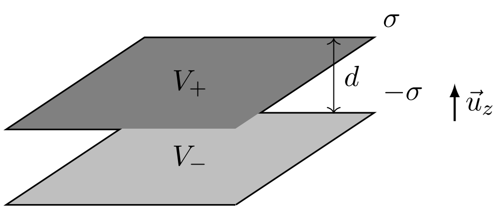
1 Pouvoir des pointes

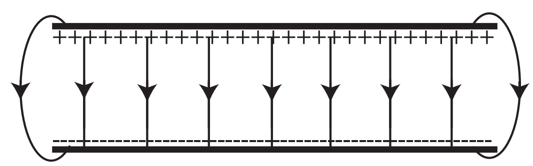
Soient deux sphères conductrices isolées de rayons respectifs R_1 et R_2 tels que $R_1 \gg R_2$. Elles sont placées suffisamment loin l'une de l'autre pour que l'on puisse négliger leur influence. Elles sont reliées par un fil conducteur. La charge totale portée par l'ensemble est Q.

1. Dessiner ce système. Calculer les charges Q_1 et Q_2 portées par chacune des sphères à l'équilibre, et les densités surfaciques correspondantes.
2. En déduire le rapport E_1/E_2 des champs électrostatiques créés au voisinage des deux sphères.
3. Application : l'air entourant un conducteur s'ionise et devient conducteur quand le champ électrique dépasse une valeur dite critique de l'ordre de 3×10^6 V·m^{-1}. Expliquer le principe de fonctionnement du paratonnerre.

2 Condensateur plan

Deux plaques conductrices identiques sont placées parallèlement l'une à l'autre. On appelle S la surface de chaque plaque et d la distance qui les sépare. Chaque plaque est reliée, par un fil conducteur, à la borne de sortie d'un générateur : la plaque du haut à la borne (+), la plaque du bas à la borne (-) (voir Figure 1). Ce générateur maintient, entre les plaques, une différence de potentiel égale à V. Les lignes de champ sont dessinées dans la Figure 2. Si on se limite à la région centrale, loin des bords des plaques, on peut considérer que les lignes de champ sont des droites parallèles, perpendiculaires aux plaques.





1. Montrer que si les lignes de champ sont des droites, alors le champ entre les plaques est constant, quelle que soit la distance du point considéré aux plaques.
   Indication : Appliquer le théorème de Gauss à une surface fermée
2. Exprimer la valeur du champ entre les plaques en fonction de V et de d.
3. Puisque le champ est constant, la densité superficielle de charge sur chaque plaque est constante elle aussi. Montrer que les deux plaques portent des densités superficielles opposées.
   Indication : appliquer le théorème de Gauss.
4. En déduire l'expression (en fonction de V, d et S) de la charge portée par chaque plaque.
   Vérifier que cette charge est proportionnelle à la différence de potentiel entre les plaques. Le coefficient de proportionnalité s'appelle la **capacité** du condensteur plan.
5. Calculer l'énergie potentielle électrostatique totale des deux plaques.
6. Calculer la force qui s'exerce sur une des plaques.
7. Le condensateur étant chargé, on débranche les fils qui relient les plaques à la batterie. Si un opérateur cherche à écarter une des plaques pour l'amener à une distance de l'autre égale à d' ($d' > d$), quel travail total W doit-il fournir ?

8. Dans une deuxième expérience, le condensateur étant chargé, on ne débranche pas les fils, de sorte que la différence de potentiel entre les plaques reste constamment égale à V, quelle que soit la distance qui les sépare. Quel travail total W' l'opérateur doit-il fournir pour faire passer la distance entre les plaques de d à d' ($d' > d$) ?

3 Conducteurs sphériques concentriques

Une sphère conductrice, pleine, S_1 de rayon R est entourée d'une sphère concentrique conductrice creuse S_2, de rayon intérieur R_i et de rayon extérieur R_e. Les deux sphères sont portées aux potentiels V_1 et V_2, respectivement. Les espaces $r \in [R, R_i]$ et $r \in [R_e, \infty)$ contiennent de l'air, assimilable au vide.

1. On souhaite calculer les charges Q_1 et Q_2 portées respectivement par S_1 et S_2, en fonction de V_1 et V_2.
   (a) Où sont localisées ces charges ?
   (b) Calculer le champ électrique en tout point.
   (c) En déduire les charges Q_1 et Q_2 en fonction de V_1 et V_2 et des différents rayons.
   (d) Montrer que la sphère S_2 joue le rôle d'écran électrostatique.
2. Expliquer pourquoi ce système forme un condensateur.
3. On relie la sphère extérieure à la masse. Calculer sa capacité. Comparer cette nouvelle capacité à celle d'une sphère isolée de rayon R.

TD 10

Densité de courant

1 Quelques ordres de grandeur

Afin de bien comprendre la différence entre la vitesse individuelle des charges et leur vitesse moyenne, procédons à quelques applications numériques :

1. Un fil de cuivre de section $1,5$ mm^2 est parcouru par un courant d'intensité 1 A. Calculer la densité volumique de courant qui le traverse.
2. En déduire la vitesse moyenne des électrons. Application numérique.
3. La vitesse typique d'un électron dans un conducteur avoisine $c/100$: discuter.
4. Dans la définition $\vec{j} = nq\vec{v}$, décrire précisément ce que désigne chaque terme.
   On donne la densité numérique d'électrons de conduction $n = 10^{28}$ m^{-3}.

2 Modèle de Drude

Dans cet exercice, on se propose de la retrouver la loi d'Ohm à partir de considérations microscopiques.

Le modèle est le suivant : on considère des électrons libres de se mouvoir dans un conducteur, ces électrons heurtent le réseau cristallin avec une probabilité $1/\tau$ par unité de temps, ils ressortent de la collision avec une vitesse aléatoire, distribuée de façon isotrope [1].

(a) Nous isolons par la pensée un électron. Exprimer sa quantité de mouvement $\vec{p}(t + \Delta t)$ en fonction de $\vec{p}(t)$, de m, et de l'incrément de vitesse $\Delta\vec{v}$, à l'ordre 1 en Δt.

(b) Nous nous intéressons au courant électronique, seules des moyennes sur un grand nombre de collisions sont pertinentes. Exprimer alors $\langle\vec{p}(t + \Delta t)\rangle$ en fonction de $\langle\vec{p}(t)\rangle$ et de τ.

(c) Faisons maintenant tendre Δt vers 0. Donner l'expression de la force effective dont résultent les collisions. Commenter.

A présent, un opérateur extérieur soumet le solide à un champ électrique non homogène $\vec{E}(M)$ (par exemple, parce qu'il a branché un générateur de tension sur le circuit.). On considère un petit volume centré autour du point M, suffisamment grand pour que la population d'électrons soit élevée, ce qui donne sens à nos processus de moyennage sur les collisions ; suffisamment petit pour que tous les électrons dans le volume ressentent le même champ $\vec{E}(M)$.

(a) Modifier le bilan de quantité de mouvement effectué précédemment pour tenir compte du champ extérieur.

(b) Exprimer la vitesse atteinte par les électrons en régime permanent.

(c) En déduire la densité volumique de courant électronique $\vec{j}(M)$ en fonction de $\vec{E}(M)$, de la densité numérique d'électrons n, de la charge e et de la masse m. Exprimer la conductivité électrique γ en fonction des données du problème.

1. i.e. de façon équiprobable dans toutes les directions.

3 Quelques fondements électrostatiques de l'électrocinétique

Dans cet exercice, nous redémontrons la loi d'Ohm rencontrée en électrocinétique à partir de l'électrostatique.

a Loi d'Ohm pour un dipôle de géométrie quelconque

On considère un dipôle de géométrie quelconque, soumis à une différence de potentiel U. Il est alors possible de feuilleter ce dipôle selon les équipotentielles.

(a) Exprimer la loi d'Ohm locale dans le conducteur.

(b) Exprimer le champ électrique $\vec{E}(M)$ en fonction du potentiel $V(M)$.

(c) Exprimer U en fonction de $\vec{j}(M)$.

  i. Montrer que $\vec{j}(M)$ est orthogonal aux équipotentielles.

  ii. Montrer que sa norme est constante sur ces dernières.

  iii. Montrer que $\nabla \cdot j(M) = 0$. En déduire que l'intensité I ne dépend pas de la section de cylindre choisie.

  iv. Exprimer $\vec{j}(M)$ en fonction de I et de la surface $S(M)$ de l'équipotentielle passant par M.

(d) Exprime U en fonction de I, comment appelle-t-on cette loi ? Que vaut la résistance du cylindre en fonction de sa conductivité ?

b Application : Loi d'Ohm pour un cylindre

Considérons un conducteur cylindrique soumis à une différence de potentiel U. On suppose que les équipotentielles sont des sections droites du cylindre (on néglige pour ceci les effets de bord).

(a) Que vaut la résistance du cylindre ?

(b) Application : quelle est la résistance d'un fil électrique de section $1,5$ mm^2, de longueur 1 m et de résistivité 17×10^{-9} $\Omega\cdot$ m ? Quelle puissance dissipe-t-il pour un courant de 10 A ?

(c) Il faut fournir $13,26$ kJ/mol pour faire fondre le cuivre, en supposant que toute la puissance joule est transmise au milieu, quel courant critique ne faut-il pas dépasser ? (masse molaire du cuivre : 63,546 g/mol) [2]

2. EDF préconise de ne pas dépasser 10 A.

TD 11

Force de Laplace, Force de Lorentz

1 Action d'un champ électrique et d'un champ magnétique perpendiculaires sur une particule chargée

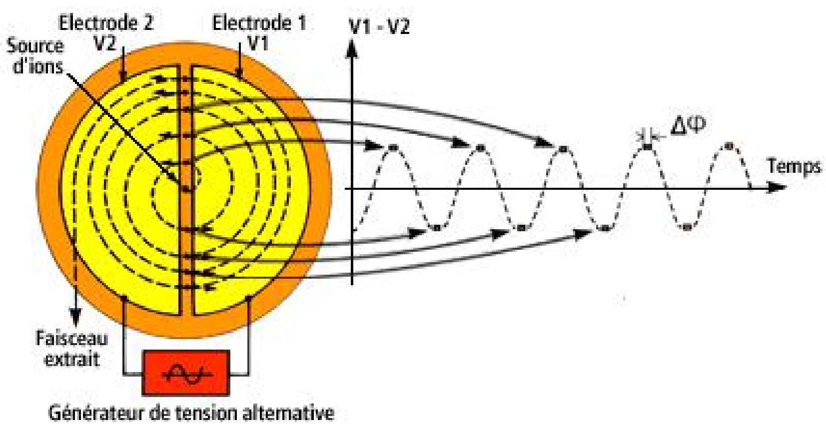
Soit une particule de masse m et de charge q dans le référentiel du laboratoire. A l'instant $t = 0$, elle est lâchée sans vitesse initiale dans une région de l'espace où règnent un champ électrique $\vec{E}$ et un champ magnétique $\vec{B}$ perpendiculaires et uniformes.

Déterminer les équations du mouvement de cette particule. Quelle est sa trajectoire ?

2 Cyclotron

Le Grand Accélérateur National d'Ions Lourds (GANIL) à Caen est une installation dédiée, entre-autres, à la recherche en physique nucléaire fondamentale, voir http ://ganinfo.in2p3.fr. Les expériences utilisent des faisceaux d'ions, accélérés par 2 cyclotrons, qui sont dirigés sur des “cibles” constituées de feuilles minces monoatomiques ou de gaz. Les expériences consistent à étudier les noyaux résultant de l'interaction entre les noyaux du faisceau et les noyaux de la cible (on étudie soit les propriétés des nouveaux noyaux créés, soit la dynamique de l'interaction elle-même).

Le but de cet exercice est de comprendre le principe de fonctionnement d'un cyclotron. Ce principe est illustré sur la figure suivante [3].



Le cyclotron est constitué de deux demi-cylindres creux distants de d à l'intérieur desquels règne un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme, perpendiculaire au plan de la figure. On fait l'hypothèse simplificatrice qu'entre les deux cylindres le champ $\vec{B}$ est nul [4]. Le demi-cylindre de gauche est au potentiel $V2$, celui de droite au potentiel $V1$, ces deux valeurs pouvant être inversées à certains moments (voir plus bas). On néglige l'action de la pesanteur.

3. figure qui provient du site internet cité ci-dessus.
4. Les cyclotrons de GANIL sont en fait constitués de quatre secteurs dans lesquels règne un champ magnétique. Ces secteurs sont suffisamment éloignés les uns des autres pour que le champ magnétique entre les secteurs soit nul, ce qui n'est pas possible dans le cas des deux demi-cylindres.

(a) Un ion positif de masse m et charge q est extrait avec une vitesse supposée nulle de la source d'ions placée au point $O(0,0,0)$, centre du dispositif. On suppose que la différence de potentiel $V2 - V1$ est constante et positive. Quelle est l'équation horaire de la particule avant de pénétrer dans le domaine où règne le champ magnétique ?

(b) La particule pénètre dans le domaine où règne le champ magnétique au point K. Démontrer que :

i. le mouvement de l'ion est plan.

ii. le mouvement est uniforme (pour cela, comparer les directions de $\vec{a}$ et de $\vec{v}$).

iii. la trajectoire est circulaire.

(c) Soit K' le point de la grille par lequel l'ion sort du demi-cylindre. Quelle est l'énergie cinétique de la particule en K' ? Quel rôle le champ $\vec{B}$ joue-t-il ? [5]

(d) Quelles sont les coordonnées de K' ? Les exprimer en fonction des paramètres du problème et de v_K, la vitesse au point K.

(e) Quel signe doit-on imposer à la différence de potentiel $V_2 - V_1$ pour que l'ion soit de nouveau accéléré lorsqu'il retourne dans l'espace où règne le champ électrique ?

(f) L'ion quitte ce domaine pour entrer dans l'autre demi-cylindre. Sur un schéma, tracer la trajectoire de l'ion dans ce demi-cylindre.

(g) Démontrer que le temps de passage dans un demi-cylindre ne dépend que des propriétés de l'ion et du champ $\vec{B}$ (et pas de la vitesse de l'ion quand il rentre dans le demi-cylindre) . On suppose que ce temps est grand devant le temps de transit entre les deux demi-cylindres. Expliquer en quoi cela permet d'utiliser un générateur de tension alternative (voir schéma).

3 Force de Laplace sur une spire conductrice

On place une spire de rayon R=12,5 cm parcourue par un courant stationnaire d'intensité $I = 8\ A$, dans un champ magnétique uniforme parallèle à son axe, de valeur $0,2\ T$. On néglige le champ magnétique créé par le courant qui circule dans la spire (voir TD suivant).

(a) Calculer la force qui s'exerce sur un élément de spire de longueur 1 cm.

(b) Comment doit-être orienté le champ pour que le rayon de la spire ait tendance à augmenter ?

5. La réalité est plus complexe : la particule dont la trajectoire est courbée perd de l'énergie par rayonnement.

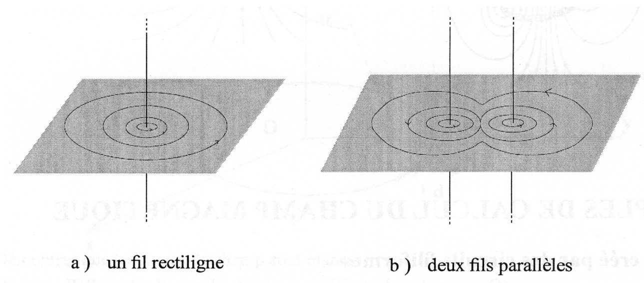
TD 12

Magnétostatique. Loi de Biot et Savart

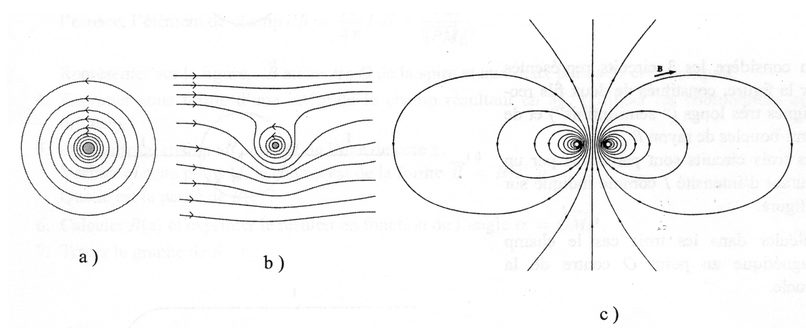
1 Lignes de champ magnétique

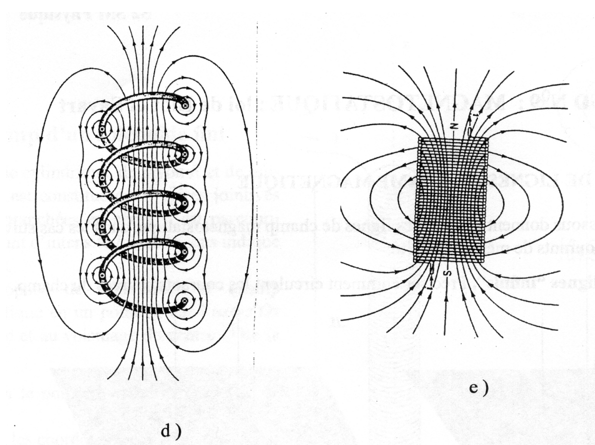
Les figures ci-dessous donnent l'allure des lignes de champ magnétostatique dans les cas suivants de fils parcourus par des courants de même intensité :

(a) Courants rectilignes "infinis". Préciser comment circulent les courants sources du champ.

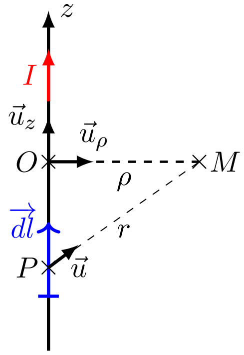


(b) Les 5 figures suivantes présentent des lignes de champ dans un plan normal aux courants sources. Préciser comment circulent les courants.





2 Fil rectiligne infini



On considère un fil rectiligne infini parcouru par un courant d'intensité I. On cherche à calculer le champ magnétique en un point M situé à une distance ρ du fil (voir figure ci-contre). $\vec{u}_z$ et $\vec{u}$ sont deux vecteurs unitaires.

(a) Exprimer r en fonction de z et ρ, où $z = \overline{OP}$.

(b) Trouver la direction et le sens du champ magnétique en M.

(c) La norme du produit vectoriel qui apparaît dans la formule de Biot et Savart fait intervenir le sinus d'un angle que l'on appellera θ. Exprimer ce sinus en fonction de z et ρ.

(a) Exprimer la norme du champ magnétique en M sous la forme d'une intégrale.

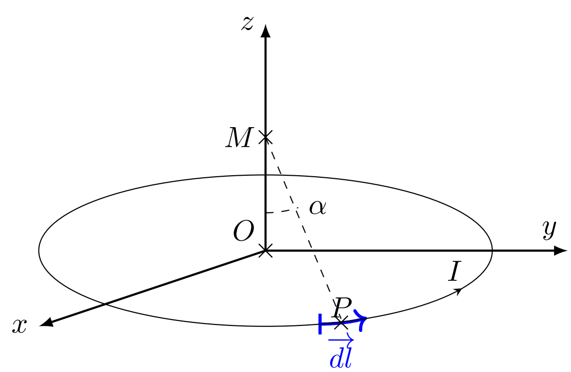
(b) Calculer $B(M)$.

3 Spire circulaire

On considère une spire circulaire de centre O et de rayon R, parcourue par un courant d'intensité I. On appelle axe de la spire la perpendiculaire au plan de la spire passant par O.
Un élément $\overrightarrow{dl}$ de la spire, centré sur P, est associé à

$$d\vec{B}(N) = \frac{\mu_0}{4\pi} I\overrightarrow{dl} \wedge \frac{\overrightarrow{PN}}{||\overrightarrow{PN}||^3},$$

quantité définie en un point N arbitraire.



(a) Représenter sur la figure $d\vec{B}$ en O et en un point M de l'axe de la spire.

(b) Les quantités $d\vec{B}(O)$ associées aux différents éléments $\overrightarrow{dl}$ de la spire ont-ils même direction ? même sens ? même norme ?

(c) Calculer $\vec{B}(O)$, champ magnétique total en O.

(d) Quels sont la direction et le sens de $\vec{B}(M)$?

(e) Exprimer la distance PM en fonction de R et de z, où $z = \overline{OM}$.

(f) Que vaut le sinus de l'angle qui intervient dans la norme du produit vectoriel ?

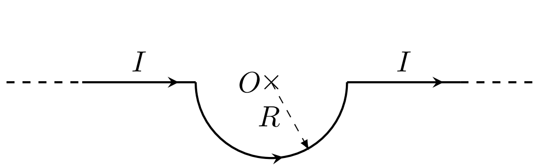
(g) Calculer $\vec{B}(M)$ et l'exprimer en fonction de R et α (voir figure).

(h) Exprimer $\vec{B}(M)$ en fonction de R et z.

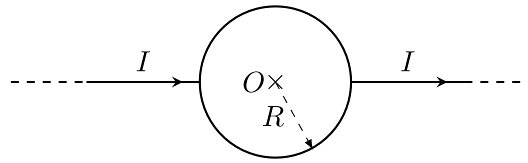
(i) Comparer $\vec{B}(M)$ et $\vec{B}(M')$, où M' est le symétrique de M par rapport à O.

4 Complément. Champ créé par des circuits filiformes

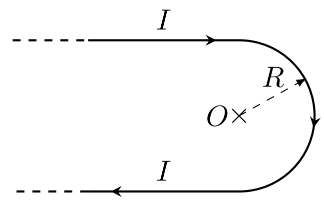
On considère les 3 circuits représentés dans la figure ci-dessous. Ils sont constitués de deux fils rectilignes très longs ("semi-infinis") et de demi-boucles de rayon R. Les trois circuits sont parcourus par un courant d'intensité I..



(a)



(b)



(c)

Calculer dans les trois cas le champ magnétique au centre O de la boucle.

TD 13

Magnétostatique. Théorème d'Ampère

1 Fil rectiligne infini

On reprend l'exercice 2 du TD 12. Il s'agit ici d'exploiter les symétries du courant et de calculer le champ magnétique à l'aide du théorème d'Ampère.

(a) Quel est ou quels sont les éléments de symétrie du courant, contenant le point M ?

(b) En déduire la direction du champ magnétique en ce point.

(c) Utiliser les propriétés du produit vectoriel pour trouver le sens de $\vec{B}(M)$

(d) Choisir le système de coordonnées le plus approprié. De quelles variables dépend le module de $\vec{B}(M)$?

(e) En déduire la courbe d'Ampère qui passe par M.

(f) Calculer la circulation de $\vec{B}(M)$. En déduire $B(M)$ et $\vec{B}(M)$.

(g) Dessiner la ligne de champ qui passe par M.

2 Spire circulaire

On reprend l'exercice 3 du TD 12. Comme précédemment, on s'intéressera au champ en un point M de l'axe de la spire.

(a) Quel est ou quels sont les éléments de symétrie du courant, contenant le point M ?

(b) En déduire la direction du champ magnétique en ce point.

(c) Choisir le système de coordonnées le plus approprié. De quelles variables dépend le module de $\vec{B}(M)$?

(d) Choisir la courbe d'Ampère qui vous permettra de calculer la circulation du champ magnétique. On rappelle que cette courbe doit être fermée.

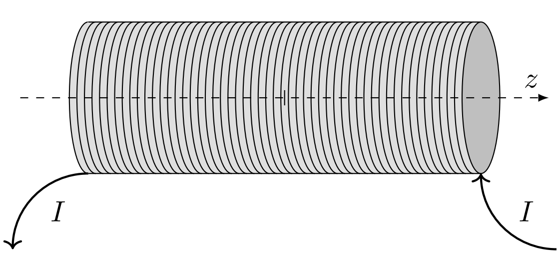
(e) Calculer la circulation du champ magnétique le long de cette courbe. On utilisera l'expression de $\vec{B}$ obtenue dans l'exercice 3 du TD 12.

(f) Commentaire.

3 Solénoïde de longueur infinie

On considère un solénoïde de longueur infinie, de rayon R et dont le nombre de spires par unité de longueur est n. Le solénoïde est parcouru par un courant d'intensité I. On appellera z l'axe de révolution du solénoïde.

On se propose de calculer le champ magnétique en tout point (à l'extérieur et à l'intérieur du solénoïde).



(a) Quel est ou quels sont les plans de symétrie en un point arbitraire M ?

(b) En déduire la direction de $\vec{B}(M)$.

(c) Trouver le sens de $\vec{B}(M)$.

(d) De quelles variables dépend le module du champ magnétique ?

(e) Montrer que le champ magnétique est constant à l'extérieur du solénoïde. Pour cela, vous choisirez une courbe d'Ampère, calculerez la circulation de $\vec{B}$ le long de cette courbe et utiliserez le théorème d'Ampère. On notera que le champ magnétique est nul très loin du solénoïde.

(f) De la même manière, montrer que $\vec{B}$ est constant à l'intérieur du solénoïde.

(g) Calculer $\vec{B}$ à l'intérieur du solénoïde.

(h) Commentaire