Mise à niveau en algèbre linéaire **Année 2017-2018**

L3 E3A Algèbre

Examen du mardi 28 novembre 2017 **2 Heures**

Exercice 1 : Questions de cours. (8 points)

1. Calculez, si c'est possible, le déterminant des matrices réelles suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \\ 7 & 5 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Qu'est-ce qu'une base d'un espace vectoriel ?

3. Dans l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2, la famille $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ forme une base. Ecrivez la matrice du polynôme $Q(X) = (1+X)^2$ dans cette base.

4. Quel est le format (nombre de lignes et de colonnes) d'une matrice représentative d'un endomorphisme dont l'espace de départ est de dimension n ?

5. Rappelez la définition du produit de deux matrices (a_{ij}) et (b_{ij}) de tailles np et pm , quelle est le format de la matrice résultante ?

6.

a. Rappelez la définition de la matrice de passage P de la base $\mathcal{B} = (e_1, \dots e_n)$ à la base $\mathcal{B}' = (e'_1 \dots e'_n)$ d'un espace E de dimension n. On pourra noter e'_{ij} la composante de e'_i selon e_j.

b. Montrez que les matrices des coordonnées X et X' du vecteur $u \in E$ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ vérifient $X' = P^{-1}X$.

7. Donnez sans preuve une interprétation géométrique du déterminant dans la base canonique de la famille de vecteurs ((0,2),(2,2)) dans $\mathbb{R}^2$.

8. Donnez sans preuve une interprétation géométrique du déterminant de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ qui a pour matrice dans la base canonique : $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Correction :

1. Il s'agit d'une famille de vecteurs libre et génératrice.

2. On peut développer le polynôme et écrire $Q(X) = 1 + 2X + X^2$. Puisque $(1, X, X^2)$, cette écriture est unique et l'on peut écrire $Q(X)$ comme un vecteur colonne :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

3. Il s'agit d'une matrice de n lignes et n colonnes.

4. Le produit de matrices est une "contraction sur les indices proches". On obtient la matrice AB, de n lignes et m colonnes suivant la formule :

$$\forall (i,j) \in \{1 \dots n\} \times \{1 \dots m\}, (AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

.

5. a) La matrice de passage P admet pour coefficients $p_{ij} = e'_{ij}$. Autrement dit, on l'obtient en rangeant dans les colonnes de P les matrices colonnes des nouveaux vecteurs e'_i, écrites dans la base de départ $\mathcal{B}$.

b) Soit $u \in E$. Alors, de façon unique, on peut écrire

$$x = x_1 e_1 + \dots x_n e_n$$

$$x = x_1' e_1' + \dots x_n' e_n'$$

avec $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ les matrices colonnes de x relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.

Par ailleurs, par définition de P, on peut écrire $e_i' = \sum_{j=1}^n P_{ji} e_j$. (Somme sur la colonne i). Ainsi, pour tout $i \in \{1 \dots n\}, x_i = \sum_{k=0}^n P_{ik} x_k'$, soit matriciellement :

$$X = PX'$$

Or, P est inversible comme matrice de passage entre bases, et donc

$$X' = P^{-1} X$$

6. Le déterminant de ces vecteurs représente l'aire occupée par le parallélogramme qu'ils engendrent. Ce calcul d'aire est effectué en fixant un volume unité au parallélogramme (en fait un carré) engendré par les vecteurs de la base canonique.

7. Le déterminant de cette application linéaire est le facteur dont sont dilatées les aires sous l'application de f. Ce calcul peut en particulier s'effectuer dans la base canonique grâce à la matrice donnée, mais ne dépend pas de ce choix.

Exercice 2 : Diagonalisation d'un endomorphisme (6 points)

Soit l'endomorphisme $g \in \mathcal{L}(E)$ dont la matrice dans une certaine base $\mathcal{B}$ est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$

1. Donnez l'expression du polynôme caractéristique $\chi_g(\lambda)$ de g.

2. Donnez les valeurs propres de g.

3. Donnez trois vecteurs propres unitaires de g associés à ces valeurs propres. Montrez qu'ils forment une base de E, notée $\mathcal{B}'$.

4. Donnez la matrice représentative de g dans $\mathcal{B}'$.

5. Peut-on calculer la matrice représentative de ce nouvel endomorphisme en prenant l'exponentielle des coefficients dans la base $\mathcal{B}$? Et dans la base $\mathcal{B}'$?

On définit l'exponentielle de g par

$$\exp(g) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{g^n}{n!}.$$

6. Donnez la matrice de $\exp(g)$ dans la base $\mathcal{B}'$.

Correction :

1. Le polynôme caractéristique de g est

$$\begin{aligned} \chi_g(\lambda) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ -2 & 4-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda) \end{aligned}$$

Où l'on a d'abord développé par rapport à la dernière colonne, puis reconnu que les valeurs 2 et 3 annulaient le déterminant en rendant deux colonnes proportionnelles.

2. Les valeurs propres de g sont les zéros de χ_g. Ce sont donc 1,2 et 3.

3.

- De façon évidente, on remarque que $g(e_z) = e_z$, donc e_z est un vecteur propre de valeur propre 1.
- Cherchons un vecteur non nul du noyau de l'application

$$g(e_3) - 2id_E = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} .$$

  Nous lisons que tout vecteur proportionnal à $e_1 + e_2$ convient, en particulier le vecteur unitaire $e'_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- Pour trouver le troisième, on cherche un élément non nul du noyau de l'application

$$g(e_3) - 3id_E = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} .$$

  Tout vecteur proportionnel à $e_1 + 2e_2$ convient, en particulier le vecteur unitaire $e'_3 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Cette famille est libre (car son déterminant ne s'annule pas), et génératrice de $\mathbb{R}^3$ car de taille 3.

4. Puisque $g(e'_1) = e'_1$, $g(e'_2) = 2e'_2$ et $g(e'_3) = 3e'_3$, on a

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} .$$

5. Passer g à la puissance entière n, ce n'est pas passer les coefficients à la puissance n, sauf pour une matrice diagonale. Il n'y a donc aucune raison de pouvoir appliquer la série exponentielle aux coefficients dans la base $\mathcal{B}$. Dans la base $\mathcal{B}'$ c'est possible car g est réprésentée par une matrice diagonale.

6.

$$g = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & e^3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$$

Exercice 3 : Résolution d'une équation différentielle linéaire (8 points)

On se propose de résoudre l'équation différentielle $(E) : y'' + y' - y = 0$. On notera arbitrairement x la variable dont dépend y.

1. Quel est l'ordre de cette équation ?

2. Dans la base canonique $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^2$, on introduit la fonction vectorielle inconnue $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$.

a. Montrez que Y vérifie une équation de la forme $(E_2) : Y' = AY$ où A est une matrice à déterminer.

b. Montrez que cette équation est linéaire. De quel ordre est-elle ?

c. Qu'a-t-on gagné à introduire une équation vectorielle ?

3. On appelle équation caractéristique de (E) l'équation $\chi_A(\lambda) = 0$.

a. Donnez l'équation caractéristique de (E). Aurait-on pu la lire directement sur l'équation ?

b. Trouvez les valeurs propres de A.

4. Donnez une base $\mathcal{F} = (f_1, f_2)$ de vecteurs propres de A dans $\mathbb{R}^2$.

5. Comment se réécrit l'équation (E_2) dans la base $\mathcal{F}$?

6. Exprimez la solution générale de (E_2) dans $\mathcal{F}$.

7. Exprimez cette solution dans $\mathcal{E}$.

8. Déduisez-en la solution générale y en extrayant la première ligne de cette solution.

Correction :

1. La dérivée d'ordre le plus haut à apparaître dans (E) est d'ordre 2. Cette équation est donc d'ordre 2.

a. La dérivée Y' de Y s'écrit

$$Y' = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \end{pmatrix}$$

Or, on peut réexprimer y'' en fonction de y et y' grâce à (E) :

$$Y' = \begin{pmatrix} y' \\ y - y' \end{pmatrix}$$

Ainsi on a :

$$\begin{pmatrix} y' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$$

b. Supposons que U et V sont deux solutions vectorielles de (E) (l'ensemble des solutions est bel et bien non vide car 0 est évidemment solution de (E)). Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $(U + \lambda V)' = U' + \lambda V' = AU + \lambda AV = A(U + \lambda V)$ où l'on a d'abord utilisé la linéarité de l'opération de dérivation, puis le fait que U et V sont solution de (E), puis la distributivité du produit de matrices sur l'addition des vecteurs pour factoriser.

c. D'une part nous avons réduit l'ordre de l'équation à étudier, d'autre part nous pouvons penser au problème comme au problème d'algèbre linéaire suivant : "trouvez les fonctions vectorielles pour lesquelles l'opération de dérivation se traduit par l'action d'une application linéaire, la même à tous les instants."

2.

a. Par définition, l'équation caractéristique est :

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} \\ 0 &= \lambda^2 + \lambda - 1 \end{aligned}$$

Nous aurions pu lire cette équation directement en remplaçant dans (E) y par 1, y' par λ et y'' par λ^2

b. Le discriminant de ce trinôme est $\Delta = 5$. Ainsi les deux valeurs propres du trinôme sont

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

3. Notons cherchons $f_1 \in \mathbb{R}^2\{0\}$ un élément du noyau de

$$A - \lambda_1 I_2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 1 & -1-\lambda_1 \end{pmatrix}$$

On remarque que le vecteur $f_1 = e_1 + \lambda_1 e_2$ convient, (on a utilisé le fait que $-\lambda_1^2 - \lambda_1 = -1$). De même, on remarque que $f_2 = e_1 + \lambda_2 e_2$ est un élément du noyau de

$$A - \lambda_2 I_2 = \begin{pmatrix} -\lambda_2 & 1 \\ 1 & -1-\lambda_2 \end{pmatrix}$$

La famille (f_1, f_2), de déterminant 1 dans la base canonique, est libre. Elle est génératrice de $\mathbb{R}^2$ car formée de deux éléments.

4. Dans la base $\mathcal{F}$, l'équation différentielle se réécrit

$$\begin{pmatrix} y' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$$

5. Dans $\mathcal{F}$, la solution générale se réécrit $\forall t \in \mathbb{R}, Y(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}_{\mathcal{F}}$

6. Soient A et B deux constantes réelles. Une solution de l'équation est alors donnée par :

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R} \quad , \quad & Y(t) = Ae^{\lambda_1 t} f_1 + Be^{\lambda_2 t} f_1 \\ & Y(t) = Ae^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}_{\mathcal{E}} + e^{\lambda_2 t} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{E}} \\ & Y(t) = \begin{pmatrix} Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t} \\ A\lambda_1 e^{\lambda_1 t} + B\lambda_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}_{\mathcal{E}} \end{aligned}$$

7. On revient au problème initial en lisant la première ligne de cette équation : la solution générale s'exprime selon :

$$\forall t \in \mathbb{R}, y(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$$

On a donc *montré* qu'elle s'écrit comme combinaison linéaire d'exponentielles !