Mise à niveau en algèbre linéaire **Année 2017-2018**

L3 E3A Algèbre

Partiel du vendredi 3 novembre 2017 **2 Heures**

Exercice 1 : Questions de cours.

1. Considérons les matrices réelles suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculez si cela fait sens A^2,B^2,C^2,AB,BA,AC,CA.

2. Qu'est-ce qu'une base d'un espace vectoriel ?

3. Rappelez la définition de la matrice d'une application linéaire $\phi : E \to F$ relativement aux bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ des espaces de départ et d'arrivée.

4. Proposez un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$, donnez deux bases de $\mathbb{R}^2$ et écrivez la matrice de f dans ces deux bases.

5. Rappelez la définition de la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.

6. Donnez la relation de changement de base que doivent vérifier les matrices d'une application linéaire. Vous définirez les notations employées .

7. Rappelez la définition du produit de deux matrices (a_{ij}) et (b_{ij}) de tailles np et pm , quelle est la taille de la matrice résultante ?

8. Rappelez la définition de l'espace dual E^* d'un espace vectoriel E.

9. Rappelez la définition de la base duale $(e_1^*, \dots e_n^*)$ d'une base $(e_1, \dots e_n)$ de E, quelle est l'interprétation géométrique de e_i^* ?

Exercice 2 : Applications directes du cours.

1. Montrez que la matrice ligne U des coordonnées d'une forme linéaire relativement à la base $\mathcal{B}$ d'un espace vectoriel E vérifie la relation de changement de base $U' = UP$ où P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. On pourra remarquer que l'image $\phi(x)$ d'un quelconque vecteur $x \in E$ peut s'écrire de deux façons différentes du point de matriciel.

2. Soit une matrice carrée P telle que $(P + I)^2 = 0$. Montrez que P est inversible et trouvez son inverse.

3. Soit une matrice carrée P telle que $\prod_{i=1}^n (P - \lambda_i I_n) = 0$. Montrez que si aucun des λ_i n'est nul, P est inversible et trouvez son inverse.

4. On définit la trace d'une matrice $M = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ M & \mapsto & \mathrm{Tr}(M) = \displaystyle\sum_{i=1}^n m_{ii}. \end{array}$$

5. Montrez que $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2, \mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

6. Déduisez-en la propriété de cyclicité de la trace $\mathrm{Tr}(AB \dots YZ) = \mathrm{Tr}(ZAB \dots Y)$.

7. Montrez qu'elle est invariante lors d'un changement de base.

Exercice 3 : Changement de bases, multiplication de matrice.

Munissons $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$. Introduisons $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique est la suivante :

$$M = \mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

et posons $\varepsilon_1 = (1, 0, 1)$, $\varepsilon_2 = (1, 1, 1)$ et $\varepsilon_3 = (2, 0, 1)$.

1. Prouver que $\mathcal{C} = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. Dresser $N = \mathrm{Mat}(f, \mathcal{C})$ la matrice de f dans la base $\mathcal{C}$.

3. Déterminer N^n pour $n \geqslant 1$.

4. En déduire l'expression de M^n pour $n \geqslant 1$.

Exercice 4 : Dualité et polynômes

On note ici $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à une indéterminée de degré inférieur ou égal à n.

1.

a. Montrez qu'une famille échelonnée de degré n (c'est-à-dire une famille dans laquelle chaque polynôme $P_i, i \in \{0 \dots n\}$ est strictement de degré i) est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

b. On se donne deux familles $\mathcal{B}_0 = (1, X, X^2)$ et $\mathcal{B}_1 = (1, X-1, (X-1)^2)$. Montrez que ce sont des bases de $\mathbb{K}_2[X]$.

2. Montrez que $\forall a \in \mathbb{R}, \forall k \in \{0 \dots n\}, \phi_{a,n} : P \mapsto P^{(n)}(a)$ est une forme linéaire sur $\mathbb{K}_n[X]$.[1]

3. On admet que $\forall a \in \mathbb{R}$, $(\phi_{a,0}, \phi_{a,1}, \dots \phi_{a,n})$ constitue une base de l'espace dual $\mathbb{K}_n[X]^*$. Qu'en déduisez-vous sur l'écriture d'une forme linéaire quelconque sur $\mathbb{K}_n[X]$?

On se place dorénavant dans $\mathbb{K}_2[X]$.

4.

a. Ecrivez la matrice colonne représentant $Q = a_0 + a_1 X + a_2 X^2$ dans B_0.

b. Que vaut[2] $\langle \phi_{0,i}, Q \rangle$ pour $i \in \{1, 2, 3\}$?

c. Trouvez la base duale $\mathcal{B}_0^* = (b_1^*, b_2^*, b_3^*)$ de $\mathcal{B}_0$, on pourra penser à utiliser une base de ϕ_a pour a bien choisi et y décomposer les b_i.

d. Réécrivez Q dans la base $\mathcal{B}_0$ en fonction des $\phi_{0,i}$, de Q et des vecteurs de base.

5.

a. Montrez que pour une base $\mathcal{E} = (e_1, \dots e_n)$ d'un espace vectoriel E on a la *relation de fermeture* $Id_E = \sum_{i=0}^{n} e_i e_i^*$.

b. Déduisez-en une procédure générale pour exprimer Q dans la base $\mathcal{B}_1$.

6. Trouvez la base duale $\mathcal{B}_1^* = (c_1^*, c_2^*, c_3^*)$ de $\mathcal{B}_1$.

7. En déduire l'expression de Q dans $\mathcal{B}_1$.

1. La notation $P^{(n)}$ désigne la dérivée n-ième de P.
2. On rappelle que la notation $\langle \phi, Q \rangle$ désigne l'action $\phi(Q)$ de la forme linéaire ϕ sur Q. Ce n'est pas un produit scalaire entre vecteurs !