L3 E3A Algèbre

Partiel du vendredi 9 novembre 2018 **2 Heures**

Exercice 1 : Questions de cours. (10 points)

1. Considérons les matrices réelles suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Calculez si cela fait sens A^2,B^2,AB,BA.

2. Qu'est-ce qu'une base d'un espace vectoriel ?

3. Définissez les coordonnées du vecteur $u \in E$ dans la base $\mathcal{E}$. Comment peut-on noter u dans ce cas ?

4. Rappelez la définition de l'espace vectoriel engendré par un ensemble de vecteurs.

5. Qu'est-ce que le rang d'une application linéaire ?

6. Donnez un exemple d'application linéaire de rang 1.

7. L'ensemble $\mathbb{N}$ est il un groupe pour la loi $+$? Pourquoi ?

8. Rappelez la définition de la matrice d'une application linéaire $\phi : E \to F$ relativement aux bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ des espaces de départ et d'arrivée.

9.

a. Proposez un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$.

b. Donnez deux bases $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$ et écrivez la matrice de f dans $\mathcal{A}$, puis dans $\mathcal{B}$.

10. Rappelez la définition de la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.

11. Rappelez la définition du produit de deux matrices (a_{ij}) et (b_{ij}) de tailles np et pm , quelle est la taille de la matrice résultante ?

Exercice 2 : Applications directes du cours. (8 points)

Le but de cet exercice est de manipuler des simples notions liées aux espaces vectoriels dans un contexte plus abstrait que $\mathbb{R}^2$: l'espace vectoriel des $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des fonctions réelles indéfiniment dérivables. Nos vecteurs sont donc des fonctions mais cela ne doit pas vous effrayer ! Pour que la terminologie reste claire cependant, on s'efforcera de parler de fonctions pour désigner les objets de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, et d'applications pour désigner les applications dont l'espace de départ est $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

On s'intéresse aux solutions de l'équation $(E) : y'' + y = 0$ dans l'espace $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

1. Montrez que l'espace des solutions $\mathcal{S}_E$ de (E) est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

2. On admet que $\mathcal{S}_E$ est de dimension 2. Montrez que la famille $(\cos,\sin)$ en forme une base.

3. Soit $\phi \in]0,\pi[$, on considère la fonction $\cos_\phi : x \mapsto cos(x+\phi)$. On admet que la famille $(\cos,\cos_\phi)$ forme une base de $\mathcal{S}_E$, exprimez $\cos_\phi$ dans la base $(\cos,\sin)$, déduisez-en la matrice de passage de l'ancienne base à la nouvelle.

4.

a. Montrez que l'application

$$\begin{aligned} d : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) &\to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) && (1)\\ f &\mapsto f' && (2) \end{aligned}$$

est linéaire sur $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

b. On remarque que l'on peut réécrire (E) de la façon suivante $(d^2 + I)y = 0$, où I est l'application identité dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Montrez que $\ker(d^2 + I) = \mathcal{S}_E$.

c. Donnez la matrice D de l'application d dans la base $(\cos,\sin)$.

d. Calculez la matrice $D^2 + I_2$, le résultat est-il étonnant ?

Exercice 3 : Changement de bases, multiplication de matrice. (4 points)

Munissons $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$. Introduisons $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice canonique est la suivante :

$$M = \mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

et posons $\varepsilon_1 = (1, 0, 1)$, $\varepsilon_2 = (1, 1, 1)$ et $\varepsilon_3 = (2, 0, 1)$.

1. Prouver que $\mathcal{C} = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. Dresser $N = \mathrm{Mat}(f, \mathcal{C})$ la matrice de f dans la base $\mathcal{C}$.

3. Déterminer N^n pour $n \geqslant 1$.

4. En déduire l'expression de M^n pour $n \geqslant 1$.